UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Momentos clave en el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo de las isometrías usando un entorno tecnológico

Màster de recerca en didàctica de les matemàtiques i de les ciències experimentals

Autora

Laura Morera Úbeda

Tutor

Josep Maria Fortuny Aymemí

10 de Septiembre de 2010

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Momentos clave en el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo de las isometrías usando un entorno tecnológico

Màster de recerca en didàctica de les matemàtiques i de les ciències experimentals

Autora

Laura Morera Úbeda

Tutor

Josep Maria Fortuny Aymemí

10 de Septiembre de 2010

AGRADECIMIENTOS

Primero de todo me gustaría agradecer a Josep Maria Fortuny todo el soporte y conocimiento que me ha dado durante este breve tiempo que hemos trabajado juntos, con su trato personalizado, que empieza a conocerme y sabe cómo hacerme trabajar, con sus sabios y encriptados comentarios, que siempre es bueno leerlos dos veces, con sus convocatorias de valiosos seminarios, en los que me he visto involucrada, igual que muchas otras personas que me han hecho mejorar notablemente por sus comentarios, opiniones, críticas “constructivísimas” y la confianza que me han transmitido. Gracias a Pedro Cobo, Ángel Gutiérrez, Nuria Iranzo, Philippe Richard, Josep Lluís Cañadilla, David Arnau y Lourdes Figueiras.

Aunque también ha colaborado muy activamente en los seminarios, quiero agradecer, especialmente a Núria Planas su paciencia y dedicación. Sin esas conversas de tarde, este trabajo no estaría tan estructurado. También quiero agradecerle sus esfuerzos invertidos en mejorar la estructura de las presentaciones orales que he hecho de este trabajo en algunos seminarios y congresos.

En un momento como este, no me olvido de todos mis compañeros que ya pasaron por esto el año pasado. Para mí fue “una gran troballa” el hecho de conocer un grupo tan especial, y que estoy segura que seguiremos en contacto: aquí en la Autònoma, en Banyoles, en Brasil, ¡o donde haga falta! ¡Marta, Cèlia, Francisco, Àngels y Antonio!

También quiero agradecer a mis nuevos compañeros, que me hacen reflexionar, escuchar, explicar, teorizar, organizar, representar, cocinar, y hasta mejorar en el dominio de las nuevas tecnologías (sí, yo, tan tecnológica que parezco…), sin todo lo que me ha enseñado, este trabajo, no estaría completo. Gracias a Marta G., Gisela, Caro Paipiton, Marisa, Natasha…

He dejado para el final, pero no por dar menor importancia a todas las personas de la Escuela Aula que directa o indirectamente han estado involucradas en este trabajo. Quiero agradecer a la directora, Rosa Flos, el haberme dado su plena confianza y soporte en mis “experimentos”. Especialmente quiero agradecer a Laura Ansorena, su colaboración en todo, su “Si, quiero”, en todas mis propuestas (que no son pocas) y su motivación para que todo siempre salga bien. También quiero nombrar a todas las personas que me ayudaron a montar un estudio de grabación dentro de las aulas: Isabel, Vero, Maria M., Maria C., Cati, Ferran, Albert, Xavier y Víctor. Para que toda la recogida de datos saliera bien, aunque no sólo estos “pocos” profesores tuvieron que colaborar, sin la ayuda y comprensión de Toni Esquirol para cuadrarlo todo, y el equipo técnico e informático Jacobo, Eduard, Joan y María, para resolverme problemas y ayudarme en todo, tampoco hubiese sido posible.

Gracias también a Enrique por recordarme día tras día, que si no me salía bien este trabajo, me quitarían la beca.

Evidentemente, quiero agradecer a todos los alumnos de Cazalí A, y en especial a los 6 “participantes” su motivación para formar parte de este proyecto.

Y por último, quiero nombrar a tres personas, que no han ayudado directamente en la realización de este trabajo, pero gracias a sus consejos, ánimos y experiencia, hacen que todo esto haya sido posible. Gracias Txema, Francesc y Cristina.

Mirando este trabajo en su totalidad, pueden parecer exageradas estas páginas de agradecimientos, pero absolutamente todas las personas que han estado nombradas, han colaborado en hacer realidad este proyecto.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1 Introducción

1.1 El problema en su contexto

El presente estudio se enmarca en el trabajo de investigación del “Màster de Recerca en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona”. También forma parte del proyecto “Contribución al análisis y mejora de las competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico”, EDU2008-01963, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España al que pertenezco como becaria FPI, BES-2009-022687.

Con esta aclaración, quiero resaltar que la pregunta de investigación y los objetivos del trabajo están diseñados pensando en la existencia de posibles investigaciones posteriores y que en algunos momentos de este trabajo puede ser que se haga referencia a ellas.

El objetivo de esta investigación es realizar un estudio exploratorio, tratando de caracterizar ejemplos de momentos clave en el aprendizaje matemático de alumnos de 3º de ESO y crear una definición operativa del concepto de momento clave de aprendizaje.

En la planificación, la creación y la implementación del diseño instructivo se han considerado sesiones de resolución de problemas de una unidad didáctica de transformaciones en el plano con el soporte de un Software de Geometría Dinámica (DGS) y puestas en común orquestadas por un profesor.

Con la finalidad de detectar evidencias de posibles momentos clave, en el análisis me fijo en la influencia de las mediaciones del software y del profesor con la ayuda de las interacciones entre parejas de alumnos, con el grupo clase y con el profesor. No es objeto de estudio analizar estas interacciones en profundidad aunque lo considero un punto muy importante, que quizá se podría tener en cuenta en futuras investigaciones.

1.1.1 Estructura de la memoria

Después de esta breve contextualización y la explicación detallada de la cuestión de investigación y los objetivos que planteo en esta primera sección introductoria, presento en el capítulo 2, una visión del marco teórico usado y una organización del mismo según la estructura que tendrá la definición operativa de momento clave. A continuación, en el capítulo 3, presento el diseño instructivo completo que ha sido diseñado no sólo para responder a la pregunta de investigación actual, sino para posibles investigaciones posteriores. En el capítulo 4, me centro en el análisis de una de las sesiones de puesta en común colectiva de la resolución de un problema de isometrías, desarrollo todo el análisis de la misma e interpreto cuatro momentos clave de aprendizaje identificados en ella. Esto, nos ayudará a tener una base sobre la que redefinir una definición operativa de momento clave adecuada a nuestro contexto y marco teórico, objetivo fundamental en la investigación en curso. Así, presento como resultado principal la definición operativa de momento clave en el aprendizaje de las isometrías. Finalmente, en el capítulo 5, presento las conclusiones teóricas y metodológicas de la investigación.

1.2 Justificación de la investigación

1.2.1 Importancia en su contexto y antecedentes teóricos

Resalto la importancia de investigar los momentos de aprendizaje por su relevancia en la mejora de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje en su conjunto. Por otra parte, hago notar que existe literatura de momentos clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje de resolución de problemas, como en Carrillo (2003), que concluye con la importancia con que tienen que ser considerados por los profesores a la hora de llevar la resolución de problemas al aula, pero con el foco en momentos clave del aprendizaje y en particular en un contexto del aprendizaje de las isometrías, la bibliografía existente es escasa, circunstancia que confiere un valor científico añadido a esta investigación.

Aparte de la escasa literatura, que ha sido uno de los motivos para escoger las isometrías como tema de estudio, también lo he escogido por ser un tema aislado en el currículum y en la implementación de él en la escuela donde se han recogido los datos. Todos los aspectos teóricos y prácticos relacionados con este tema, se llevan a cabo en el curso de 3º de ESO. De esta forma, los momentos clave de aprendizaje sé que se dan en el contexto que analizo y así tiene sentido estudiar los momentos clave de aprendizaje sólo en el espacio de tiempo que dura el tema.

Como antecedentes metodológicos de esta investigación, me he basado en trabajos precedentes en mi grupo de investigación, donde se han hecho estudios de caso de la influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel (Iranzo & Fortuny, 2009).

1.2.2 Motivaciones personales

Personalmente, la motivación que me ha llevado a interesarme por este problema, ha sido mi experiencia como profesora en la enseñanza de las isometrías. Intuitivamente era consciente del potencial de trabajar las isometrías con la ayuda de un Software de Geometría Dinámica, pero quería profundizar más desde un ámbito más formal, aunque sin perder de vista la implementación práctica del estudio.

En la orientación final del trabajo y la manera de plantear los objetivos, ha influido el hecho de tener las condiciones favorables para poder seguir con los estudios de doctorado, teniendo una perspectiva de continuidad que particularmente me motiva y me ha ayudado a definir y redefinir la dirección de muchos de los apartados de este trabajo.

1.3 Concreción del problema: Cuestión de investigación y objetivos

Partiendo de una inquietud intuitiva generé la siguiente pregunta de investigación global (PI_G):

(PI_G): ¿Cuáles son las influencias y características más relevantes del aprendizaje matemático en un contexto de trabajo de las isometrías con un entorno tecnológico?

Recalco que esta pregunta global es la que me planteé con visión de investigadora de una práctica docente personal donde intuitivamente veía que surgían momentos interesantes en el aprendizaje matemático de los alumnos por el hecho de trabajar con DGS. Así, aunque esta es la pregunta global que me planteo en el presente trabajo, me centro en el análisis de una sesión de clase de puesta en común. Esta sesión se realizó con todos los alumnos de una clase después que hubieran trabajado por parejas y con la ayuda del software de geometría dinámica (GeoGebra) la resolución de un problema de transformaciones en el plano, concretamente de giros. Por ese motivo especifico que mi pregunta de investigación concreta (PI_C) para este trabajo es:

(PI_C): ¿Cuáles son las influencias y características más relevantes en el aprendizaje matemático en una sesión de clase después del trabajo con GeoGebra de un problema de isometrías?

En futuras fases de la investigación, que no se abarcan en el presente trabajo, se focalizará la búsqueda de influencias y características también en sesiones de clase de resolución de problemas en parejas con GeoGebra, para así poder completar los resultados de la pregunta concreta presentada anteriormente y acercarse a una repuesta para la pregunta de investigación global.

Para abordar la pregunta realizada y poder encontrar algunas de las influencias y características, primero he visto la necesidad de buscar una definición propia de lo que es para mí el aprendizaje en el contexto que ha sido descrito, para luego poderlo caracterizar, y en un futuro estudiarlo en profundidad, por eso me he planteado el siguiente objetivo general (OG):

(OG): Construir una definición operativa para la caracterización de momentos clave en el aprendizaje matemático en el contexto planteado.

Para empezar, es necesario crear una definición propia que estará en constante desarrollo y por consiguiente se irá redefiniendo a medida que avance la investigación.

En el marco del proyecto en el que colaboro, trabajamos en torno a dos ejes principales que serán los dos focos de interés en que basaré la definición operativa, la cognición matemática y la mediación. Para llevar a cabo el objetivo, podemos subdividir el objetivo general en dos sub-objetivos (O1, O2):

(O1): Determinar aspectos sobre *cognición matemática* relevantes en la caracterización de momentos clave.

(O2): Determinar aspectos sobre *mediación* relevantes en la caracterización de momentos clave.

Ya veremos que aparte de caracterizar los momentos de aprendizaje en relación a estos dos ejes, hay un tercer eje, el de la *interacción social*, que no es objeto de estudio de este trabajo pero que lo tendré en cuenta por su presencia en la práctica docente y como vehículo para poder acceder a las situaciones donde se produce mediación.

2 Marco teórico

En este apartado, presento lo que ha acabado siendo mi marco teórico esencial y lo presento bajo una estructura que está en consonancia con los ejes de los objetivos del trabajo y por consiguiente también de la definición operativa que presentaré posteriormente. También desarrollo todo el proceso recorrido para llegar al que finalmente he presentado. Ha sido un ir y venir de la teoría a la práctica hasta que, poco a poco, lo he acabado definiendo.

Al inicio de la investigación, para aproximarme a una definición de momento clave en el aprendizaje, observé que debía disponer de evidencias –mediante comentarios, gestos, usos del software u otras representaciones – de que efectivamente se produce un cambio en el aprendizaje.

Una característica general de momento clave en el aprendizaje, es que provenga o emerja de un estado inicial con conceptos o procesos no asumidos. Dentro del planteamiento de la investigación, he acabado viendo que el momento clave debe estar influenciado al menos por una de las dos variables de mediación que considero en el marco teórico, el profesor y el Software de Geometría Dinámica, en este caso, el GeoGebra, pero este concepto no fue considerado exactamente así desde el inicio. Veamos los inicios del concepto.

La primera idea de lo que podría ser una representación gráfica preliminar de momento clave la basé en la consideración de las transiciones que se producen entre un estado inicial y uno final, sobre un desarrollo interactivo de aprendizaje e influenciado por el software, el profesor y la pareja, tal como se muestra en la Figura 1.

Nótese que en un principio consideré como una variable más la interacción con la pareja de trabajo, pero veremos más adelante, que no acabará formando parte directamente de los ejes principales del marco teórico final.

Figura 1. Representación gráfica preliminar de momento clave.

Después de esta definición intuitiva, contrastando el esquema con los primeros datos analizados, consideré una reorganización del gráfico como se muestra en la Figura 2, para dar paso a una representación de momento clave centrado en el aprendizaje y caracterizado por los dos ejes de nuestro marco teórico, la cognición matemática y la mediación (ver Figura 2).

Figura 2. Reestructuración de la representación gráfica de momento clave.

En esta nueva agrupación, mantengo el cambio evidenciado como motivo central en el momento clave de aprendizaje. También he observado que es importante remarcar que el aprendizaje en que me baso es de cognición matemática, así, éste se convertirá en uno de los ejes principales. Contrastando los primeros datos con la primera idea de definición, observé que tanto el Software como el profesor, hacen una tarea de mediación para facilitar el aprendizaje de los alumnos y que es importante caracterizar estos tipos de mediación; por eso lo he considerado como un segundo eje fundamental. También he detectado, tal y como había representado al inicio, que los alumnos tienen interacción con la pareja de trabajo, con el profesor y tendríamos que incluir también con el grupo clase, pero en este trabajo, teniendo en cuenta que no tengo como objetivo analizar las interacciones, su papel es vehicular, en el sentido de que está presente, y nos servirá para poder analizar la mediación y la cognición matemática. Así en la representación gráfica, toma un papel secundario, aunque necesario. Quiero aclarar que dejar el eje de la interacción social con un papel secundario en la estructura de este trabajo no es porque no valore su importancia sino porque he decidido centrarme y analizar más profundamente los dos ejes principales que además se comparten en el proyecto al que pertenezco.

De acuerdo con estas consideraciones, el marco teórico de la investigación se estructura en base a dos ejes que permiten aproximarme a una teoría sobre los momentos de aprendizaje, como se muestra en la Figura 3. Observemos también que el eje de cognición matemática lo expreso como una consecuencia del aprendizaje, para mostrar que es lo que produce el estudiante, mientras que el eje de mediación, influye sobre el momento de aprendizaje, en el sentido de que facilita la existencia de ese momento. Como ya he comentado anteriormente, el eje de interacción está en un segundo plano, pero será necesario para poder analizar la mediación e indirectamente, también la cognición matemática.

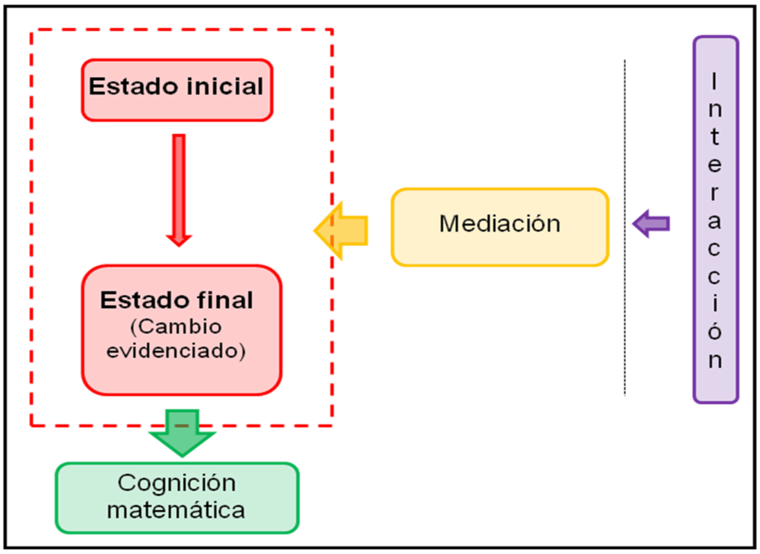


Figura 3. Representación de los ejes del marco teórico.

En primer lugar, antes de entrar en profundidad con los ejes principales del marco teórico, hay que tener en cuenta que el diseño de la unidad didáctica forma parte de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995), donde los alumnos irán avanzando a lo largo de todas las sesiones y que en futuras investigaciones podrá ser muy interesante que se analicen los momentos clave de aprendizaje de una forma longitudinal. Para concretar esta Trayectoria, tomamos el concepto de espacio básico de un problema y el de espacio básico de la acción tutorial humana de Cobo y Fortuny (2005). El espacio básico de un problema es el conjunto de todas las posibles formas de resolverlo, es decir, serían todas las posibilidades que tendría de resolverlo un resolutor experto; el espacio básico de la acción tutorial humana sería el árbol de mensajes asociados al espacio básico del problema que permite que el profesor pueda dar mensajes en determinados momentos.

En el presente trabajo, he hecho una adaptación de estos dos conceptos para crear un árbol completo del proceso de resolución, que consiste en un árbol exhaustivo de todos los posibles caminos que puede tomar un alumno para resolver el problema. Así, el árbol incluye diferentes procesos para abordar el problema y diferentes conceptos matemáticos involucrados en él. Los problemas escogidos, en general, tienen una sola forma de resolverlos, mediante transformaciones en el plano, pero son muy ricos por las diferentes profundidades a las que se puede llegar de la solución teniendo en cuenta que trabajamos en un entorno DGS, por eso, no es exactamente el espacio básico de un problema al que se refiere Cobo. Para completar el nuevo árbol, he adaptado el espacio básico de acción tutorial humana y he incorporado mensajes de ayuda dentro de los árboles completos. Estos aspectos también están relacionados con el diseño de la unidad didáctica y los propósitos de la misma.

También hay que tener en cuenta, que por el hecho de basar el diseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) en un entorno de Geometría Dinámica (GeoGebra), he usado el concepto de orquestación instrumental, inicialmente desarrollado por Trouche (2004), y que posteriormente ha sido modificado por Drijvers, Doorman, Boon, & Gisbergen (2010). La estructura que ellos dan a la orquestación instrumental consiste en tres elementos: la configuración didáctica, el modo de explotación y la representación didáctica.

En mi trabajo, la configuración didáctica consiste en el diseño de la unidad y por consiguiente de la THA, que incluye la decisión de qué herramientas tecnológicas se pueden usar en cada problema y cómo pueden usar el entorno durante las clases. En la parte del modo de explotación, igual que en Iranzo y Fortuny (2009), he diseñado un sistema de mensajes, como he mencionado anteriormente, siguiendo los árboles de problemas, que también esperan orientar la génesis instrumental del alumno. Así, estas dos partes de la orquestación instrumental, me proporcionan cómo tratar la parte tecnológica en la THA. El tercer elemento de la orquestación instrumental, la representación didáctica, no forma parte del diseño instructivo sino de la implementación práctica de éste. Por este motivo lo trataré en profundidad en el apartado de la mediación del profesor.

Después de este marco teórico general, en el que me he basado para llevar a cabo el diseño instructivo, detallaré el marco teórico que he usado para el análisis de los datos y la construcción de la definición operativa que buscamos.

2.1 Cognición matemática

"*Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras*" (Treffers, 1987). Según la definición que propone él mismo de matematización vertical, que consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones, considero los aspectos de *cognición matemática* relacionados con la producción de aprendizaje, tanto de contenidos como de procesos implicados en la resolución de problemas sobre isometrías y en su argumentación.

Aparte de interesarme en los conceptos y procesos involucrados, también me interesa estudiar relaciones o conexiones que el alumno pueda hacer en su aprendizaje, no sólo entre conceptos o procesos dentro del mismo problema, sino entre otros problemas de la secuencia didáctica que presentaré en el diseño metodológico. Así, en este caso tomo como referencia la matematización horizontal de Treffers, que nos posibilita tratar matemáticamente un conjunto de problemas.

2.2 Mediación

El segundo eje clave del marco teórico es la *mediación*, tanto del software como del profesor. Por un lado me centraré en la mediación que produce un entorno de DGS en el aprendizaje y en particular en la génesis instrumental de los estudiantes (Rabardel, 1995). La génesis instrumental es el paso de considerar el software como un artefacto, a considerarlo como un instrumento, que sería la conjunción del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para usarlo. Notamos también que la génesis instrumental tiene dos dimensiones, la instrumentación y la instrumentalización, que se definen como el proceso mediante el cual el artefacto influye al alumno y el proceso de la internalización del uso del artefacto, respectivamente. Adoptaremos la graduación que usan Iranzo y Fortuny (2009), de los dos procesos como se muestra en la Tabla 1 y en la Tabla 2, respectivamente.

Alto	Transformación de comandos en acciones geométricas.
Medio	Uso del artefacto de acuerdo con un objetivo (por ejemplo, uso del arrastre de test para validar una figura).
Bajo	Uso de pocos comandos para construcciones geométricas elementales. Dificultades técnicas para aplicar comandos (sintaxis, orden).

Tabla 1. Grados de instrumentación.

Alto	Coordinan el uso de la ventana geométrica y algebraica y utilizan conocimiento geométrico. Internalización de los comandos (modo desplazar, uso de macros, etc.).
Medio	Coordinan el uso de la ventana geométrica y algebraica. Aparición de inferencias figurales.
Bajo	Los estudiantes se basan principalmente en propiedades de medida y no consideran propiedades geométricas.

Tabla 2. Grados de instrumentalización.

Dentro de los aspectos relacionados con la mediación, pero en este caso por parte del profesor, utilizamos el concepto de orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010; Trouche, 2005) que hemos comentado anteriormente, pero nos basamos en el tercer aspecto, la representación didáctica, con el fin de poder analizar la gestión final del profesor respecto a la génesis instrumental de cada alumno, ya que puede suceder que los estudiantes tengan problemas técnicos o conceptuales relacionados con el uso del software que no se hayan tenido en cuenta en el modo de explotación, segundo aspecto de la orquestación instrumental citado anteriormente.

Desde el punto de vista de la mediación del profesor, la orquestación instrumental no es la única mediación que considero influyente en el aprendizaje de los alumnos, por eso considero fundamental el concepto de andamiaje como lo entiende Anghileri (2006), en el sentido de que hay una mediación por parte del profesor flexible y móvil, de forma que facilita el aprendizaje de los alumnos para que sigan un proceso de matematización vertical o horizontal (Treffers, 1987) y consigan los objetivos de la unidad didáctica.

En particular, en las clases de puesta en común, caracterizaré la mediación del profesor según la fase del proceso de filtraje “filtering approach” de Sherin (2002) en que se encuentre. Así, la estructura de las discusiones de las puestas en común, involucran tres componentes principales: a) la generación de ideas, b) la comparación y evaluación, y c) el filtrado.

Considero estos aspectos dentro de la mediación del profesor teniendo en cuenta que estas ideas son las que tiene el profesor para facilitar el aprendizaje de forma indirecta para el alumno, aunque, un vehículo básico que el profesor utilizará para transmitir a los alumnos estas ideas abstractas, será la interacción con ellos (Anghileri, 2006).

Para que no conlleve confusión, llamaré andamiaje a la mediación u orquestación que no es específicamente instrumental, es decir, la que no tiene relación con el software.

2.2.1 Interacción social

No es uno de mis objetivos estudiar los aspectos que caracterizan la interacción social en los momentos de aprendizaje, pero sí que considero que están presentes, y como he comentado anteriormente, en este trabajo utilizo la interacción social como vehículo para poder analizar la mediación y la cognición matemática de los momentos clave, en el sentido que me facilita acceder al pensamiento de los alumnos.

Como he comentado, una de las interacciones en que me fijaré será la interacción con el profesor porque considero importante qué tipos de interacción tiene con los alumnos para mediar el aprendizaje. Seguiré las ideas de Anghileri (2006), que define diferentes tipos de interacciones según el nivel de andamiaje en que se encuentre.

Otro tipo de interacciones serán las del grupo clase, sobretodo en las sesiones de puesta en común, ya que es una oportunidad para que los alumnos desarrollen sus ideas (Douek, 2005).

Evidentemente, por cómo he diseñado la unidad, la interacción con la pareja también la tendré en cuenta. Las definiciones de Kieran (2001) de discurso público y discurso privado y el hecho de fijarme en el significado matemático de las intervenciones, me ayudará a caracterizar qué clase de interacción hay en un cierto momento clave.

Como mi objetivo es hacer una definición operativa para poder caracterizar los momentos clave detectados, basándome en todas las ideas que acabo de presentar, he llegado a una nueva estructura de momento clave que sigue el esquema que reproduzco en la Figura 4.

2.3 Estructura final del marco teórico

Como resumen y teniendo una mirada más global, el esquema que presento está centrado en el cambio evidenciado que produce aprendizaje, en el que caracterizo qué aspectos de la cognición matemática involucra o produce, siguiendo la clasificación de Treffers. También caracterizo qué influencias de la mediación ha sufrido, siguiendo la teoría de la génesis instrumental de Rabardel (1995) para la mediación del software y diferenciando los tipos de mediación del profesor según si es instrumental (Drijvers et al., 2010), o si, por el contrario, se trata de una mediación más cognitiva o procedimental a través del "filtering approach" de Sherin (2002).

Este esquema también incluye la interacción social que se ha visto involucrada, caracterizándola según las ideas de Kieran (2001), Anghileri (2006) y Douek (2005) aunque no sea un eje central de la definición.

Como se observa en la parte superior de la representación gráfica, el esquema también caracteriza en qué punto de la THA (Simon, 1995) se encuentra el momento clave e incluso en qué fase del problema (Cobo, 1998).

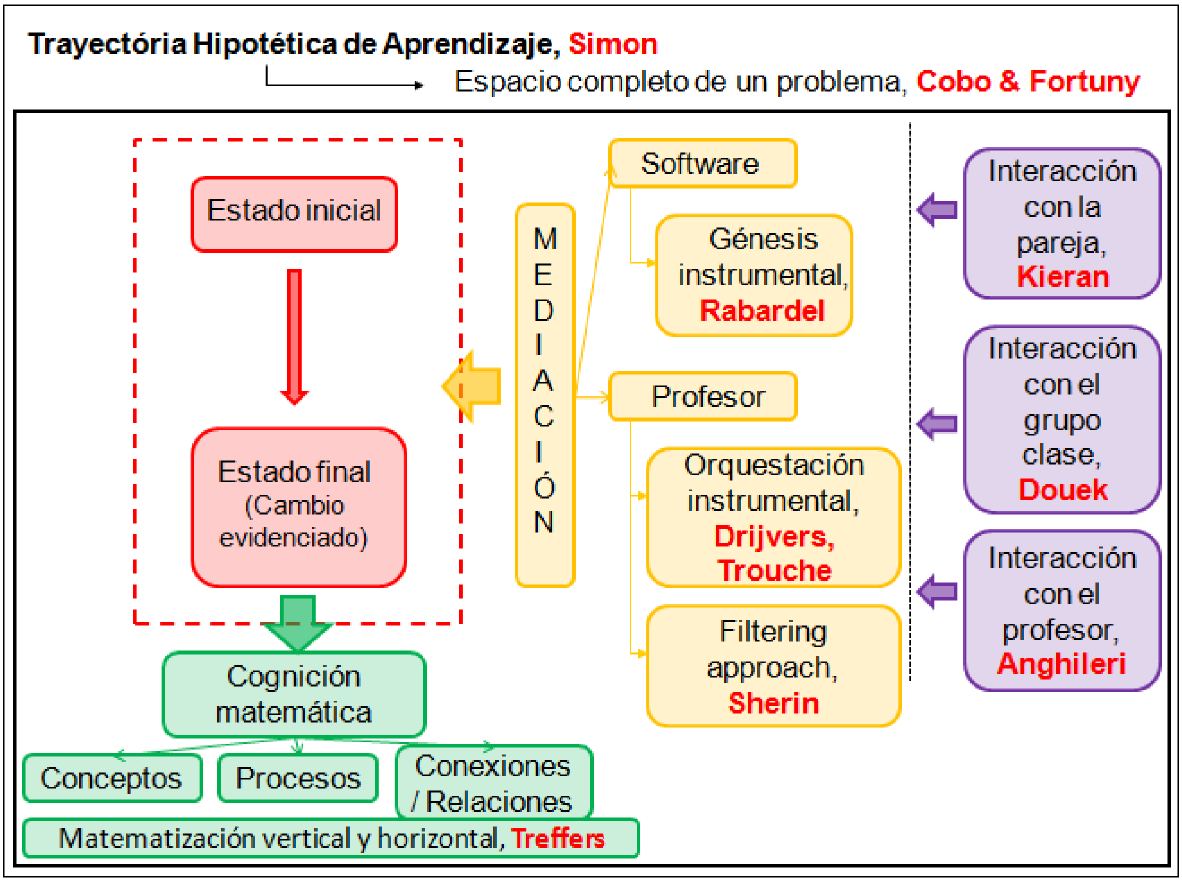


Figura 4. Representación gráfica de la definición operativa de momento clave de aprendizaje.

Presento la Figura 4 en esta parte final del marco teórico, pero quiero dejar claro que he construido esta figura después de haber revisado la primera versión del marco teórico de acuerdo con el análisis preliminar de los datos. En este sentido, considero que la actual versión del marco teórico ya ha sido sustancialmente ampliada a la luz de la lectura de datos, tal como sugiere la evolución desde la Figura 1 a la Figura 4.

3 Metodología

3.1 Aproximación metodológica

La aproximación metodológica que he escogido para conseguir los objetivos de este trabajo, es realizar un estudio exploratorio en una situación didáctica real de clase. Para ello, realizaré un estudio de casos en los que el análisis de los mismos, me ayude a definir y refinar la definición operativa de momento clave en el aprendizaje matemático. Quiero dejar claro que para mí, los casos son los ejemplos de momentos clave que he detectado dentro de la situación real de clase y que posteriormente se hará un análisis de éstos, es decir, que los casos no son los participantes.

3.2 Participantes

Para llevar a cabo el estudio, he escogido una clase de 3º de ESO en la que soy profesora de una escuela de Barcelona, donde analizo en profundidad seis alumnos que trabajan por parejas, Elisabet-Hugo, Meritxell-Carles y Adriana-Matías. Los he elegido por su participación y calidad expresiva en la asignatura de matemáticas. Para crear las parejas he tenido en cuenta que los alumnos tuvieran niveles académicos similares, pero capacidades procedimentales diversas. Los alumnos restantes de la clase no son informantes principales de la investigación, pero han realizado todas las actividades y tienen un papel significativo en las sesiones de puesta en común.

Al principio de curso les expliqué que estaba haciendo una investigación sobre un tema de geometría y que en algunos momentos les pediría su colaboración para grabar las clases. Les expliqué que las grabaciones no serían públicas y que sólo se harían con el objetivo de utilizarlas en la investigación.

Les pedí su consentimiento, sobretodo a los seis alumnos principales. En este caso, como las grabaciones se han llevado a cabo en las horas de clase y todos los alumnos podían aparecer, se han pedido autorizaciones por escrito a todas las familias de la clase, como se muestra en los Apéndices III y IV.

Al finalizar las grabaciones, agradecí su activa colaboración a todos los estudiantes. También quiero hacer constar, que en todo momento se ha mantenido el anonimato de los alumnos y que los nombres que aparecen en la investigación no se corresponden con los nombres reales de los alumnos que fueron grabados.

3.3 Instrumentos utilizados

Para llevar a cabo el estudio exploratorio, he diseñado una unidad didáctica del tema de transformaciones en el plano. Quiero resaltar que es una unidad didáctica diseñada desde un punto de vista constructivista, donde los alumnos tienen que ir deduciendo la teoría implícita resolviendo los problemas propuestos, los cuales son el eje central de la unidad. También le he dado mucha importancia al hecho de que los alumnos investiguen, conjeturen y se acerquen, dentro de lo posible, a demostrar todo aquello que estudian. Así, es una unidad didáctica basada en la resolución de problemas y fundamentada en el trabajo colaborativo por parejas.

A continuación explicaré en detalle las características de la unidad didáctica diseñada.

3.3.1 Proceso hacia el instrumento

Primero de todo, me gustaría contextualizar el nivel y la forma de trabajar a la que están acostumbrados los alumnos, para que se entienda el diseño creado para esta investigación. Durante el curso han trabajado el concepto de demostración y el de conjetura, aplicado sobre todo a temas algebraicos. Antes de realizar esta unidad didáctica, los alumnos realizaron otra de geometría básica para familiarizarse con el software y la diferencia entre producir dibujos y figuras (Laborde & Capponi, 1994). Los alumnos sólo han trabajado algún concepto de transformaciones en el plano en sus últimos cursos de primaria.

El diseño instructivo se ha estructurado en ocho sesiones de clase de una hora cada una, como indica la siguiente Tabla 3.

Estructura esquemática de la Unidad Didáctica de Transformaciones en el Plano		
SESIÓN	**LUGAR**	**TÍTULO**
1	Clase ordinaria	Introducción + Test inicial
2	Clase de ordenadores	**Problema 1:** Construir simetrías axiales **Problema 2:** Identificar simetrías axiales y construir eje

3	Clase ordinaria	Puesta en común problemas 1 y 2
4	Clase de ordenadores	**Problema 3:** Encontrar el centro de giro
5	Clase ordinaria	Puesta en común problema 3
6	Clase de ordenadores	**Problema 4:** Composición simetrías axiales
7	Clase de ordenadores	**Problema 5:** El problema del billar
8	Clase ordinaria	Puesta en común problemas 4 y 5 + Valoración global

Tabla 3. Estructura de la unidad didáctica

La primera sesión consiste en resolver un test inicial por parejas con lápiz y papel y sin soporte tecnológico (consultar Apéndice I). El test es un instrumento para definir el nivel inicial de conocimiento matemático en el tema de transformaciones en el plano de las parejas que se están grabando y para tener registrado el punto de partida como pareja.

En las sesiones segunda, cuarta, sexta y séptima, los alumnos trabajan por parejas con un entorno de DGS resolviendo los problemas 1 y 2, 3, 4 y 5 respectivamente. (Pueden verse todos los enunciados de los problemas y los árboles completos de cada uno de ellos en el Apéndice II.) Los alumnos son asistidos por el profesor cuando plantean cuestiones. El profesor tiene una guía para dar mensajes que se encuentra en el árbol completo de cada problema que se basa en el espacio básico del problema y el de la acción tutorial humana, tal como ya se hizo en el estudio documentado en Cobo y Fortuny (2005).

En la tercera, quinta y octava sesiones, el profesor gestiona una puesta en común en la clase ordinaria de las resoluciones de los problemas planteados en la que participan todos los alumnos de la clase, aunque se conserva la distribución de asientos por parejas para poder seguir observando la interacción, si la hay. Cabe notar, que aun teniendo la guía del espacio básico del problema, hay que poner especial atención en la gestión, para incorporar no sólo los conocimientos requeridos, sino los procesos de resolución que pueden verse involucrados.

El objetivo de plantear problemas para resolver en parejas es poder observar el proceso de resolución de cada alumno o pareja. En este caso, la interacción con la pareja es utilizada para hacer explicitar a los alumnos sus pensamientos y poder acceder a ellos, aunque en ocasiones veremos que hay una influencia de esta interacción en el momento de aprendizaje, aunque no es objeto de estudio de este trabajo entrar en su análisis profundo.

Los problemas están contextualizados y uno de los motivos es que así, se crea un entorno favorable para preguntarles a los alumnos la justificación de todo aquello que hacen, como por ejemplo, el hecho de tener que explicar a los trabajadores de una fábrica porqué hay que colocar una máquina en un cierto sitio, como veremos en el problema que presento en profundidad posteriormente.

Por otro lado, las puestas en común, tienen en realidad un doble objetivo. En referencia al primero, como investigadora, me interesa observar el aprendizaje de los alumnos en estas sesiones y poder contrastar sus actuaciones con las de trabajo en pareja sobre el mismo problema. El segundo objetivo parte de la idea de que teniendo en cuenta que la unidad se ha diseñado también con fines didácticos, era necesario organizar puestas en común para poder ir igualando los niveles de diferentes parejas de la clase. Como se observa en los árboles de problemas completos, como por ejemplo el de la Figura 6, vemos que hay diversas formas de resolver el problema, dependiendo de la profundidad donde se llegue, así el objetivo en las puestas en común es acercar la resolución más completa a todas las parejas y poder corregir posibles errores que una pareja hubiese aceptado como válidos.

La dinámica de la unidad se ha diseñado de manera que durante las sesiones de resolución de problemas, los alumnos trabajan por parejas, con un ordenador con acceso al GeoGebra y siempre pueden reclamar la atención de la profesora para hacer consultas, a las que ésta, contesta siguiendo el espacio completo del problema. La investigadora, que coincide con la profesora de la clase, está pendiente de las tres parejas del estudio y especialmente para este estudio existe la colaboración de otra profesora, conocedora de toda la unidad por estar implantándola en la otra clase de 3º de ESO, que atiende al resto de parejas de la clase para que todos los alumnos tengan el mismo trato y las mismas posibilidades. Los alumnos tienen que leer el enunciado y entregar el documento de GeoGebra (.ggb) mediante el campus virtual de la asignatura (Moodle), de tal forma que la profesora puede ver a qué soluciones han llegado todos los alumnos de la clase antes de organizar la puesta en común de la siguiente sesión de clase correspondiente al problema en cuestión. También tienen la hoja de respuesta de cada problema para poder justificar, argumentar o razonar todo lo que han hecho durante la sesión.

Las clases de resolución de problemas, se llevan a cabo en la clase ordinaria, equipada con un ordenador y un proyector. Principalmente, se sigue el proceso de filtering approach de Sherin (2002) y los alumnos plantean cómo han resuelto el problema en la clase anterior mediados por la profesora siguiendo las diferentes fases y creando una discusión general de cada problema. El uso del GeoGebra no está predefinido pero es accesible y se deja en función de las necesidades y la orientación que tome la puesta en común.

Aunque he presentado la estructura de toda la unidad didáctica, en este trabajo me he centrado en el estudio de la quinta sesión, correspondiente a la puesta en común de la resolución del problema 3 (ver Figura 5). He escogido ésta, por su riqueza en el papel del profesor como orquestador y por la riqueza de conocimientos conceptuales y procedimentales que acabó involucrando, así como también el rigor matemático que se requirió para resolverlo totalmente. En el Apéndice II presento todos los problemas de la unidad didáctica para que el lector pueda poner en contexto el problema estudiado en profundidad, aunque lo he dejado en un segundo término, por no ser objeto de estudio en el presente trabajo.

Problema 3:

Imaginad que nos contratan en una fábrica, para ayudar a resolver un problema:

Teníamos una máquina que nos giraba las piezas de un sitio a otro, como se muestra en la animación anterior, pero la llevaron a arreglar, y ahora que ya funciona perfectamente, no saben dónde la tienen que colocar para que siga transportando las piezas como lo hacía antes.

Ayudad a los técnicos a colocar la máquina de giro en su sitio. Escribid argumentos para convencer a los técnicos de vuestra solución. Tenéis la ventana del GeoGebra para ayudaros a resolver la situación.

Figura 5. Enunciado del problema 3.

Antes de proponer el problema 3 a los alumnos, lo he analizado haciendo una adaptación del espacio básico del problema e incluyendo los mensajes o itinerarios del espacio de acción tutorial humana. Como se observa en la Figura 6, el esquema de resolución del problema lleva incorporados los mensajes que el profesor puede proporcionar durante la resolución del problema según el punto en el que se encuentran los alumnos. Así, con alumnos de niveles y ritmos de trabajo distintos, el profesor puede ser flexible en cuanto a qué rama de resolución debe seguir cada pareja teniendo en cuenta que podrán reflexionar sobre los puntos a los que no hayan llegado en la puesta en común. En este caso, el problema no sólo es interesante por la variedad de procesos involucrados sino por la riqueza de rigor matemático que se requiere para resolverlo totalmente.

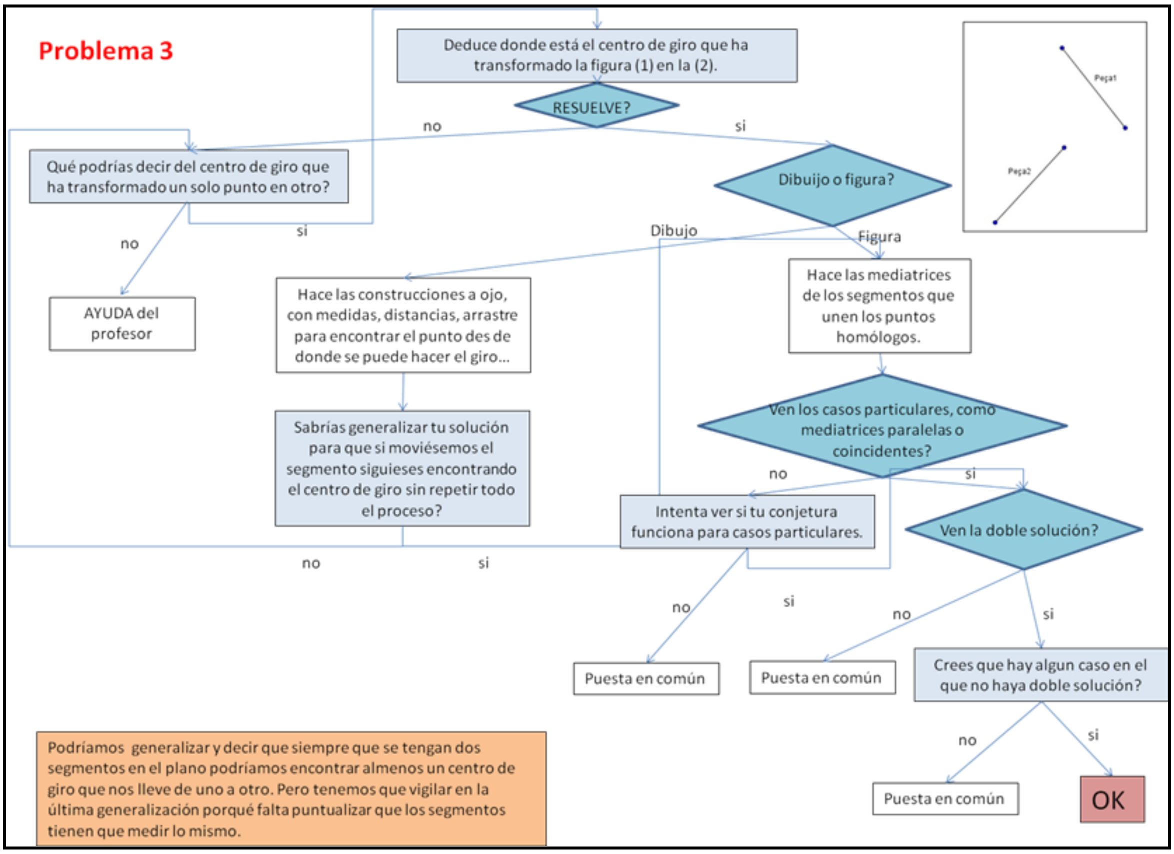


Figura 6. Adaptación del espacio básico y de acción tutorial humana del problema 3.

Al inicio del árbol completo del problema 3, en el que se pide encontrar el centro de giro de 2 segmentos, se puede observar que se considera un posible bloqueo inicial por parte del alumno, con el que el profesor puede hacer una aportación para simplificar el problema y que el alumno se plantee cómo determinaría el centro de giro de un solo punto en lugar del centro de giro de dos segmentos.

En el caso de que el alumno resuelva el problema, se observa en el árbol que hay distintos grados de profundidad en la resolución. Por ejemplo, se considera como posible solución una construcción a ojo o que utilice medidas o distancias, es decir, que sea una construcción tipo dibujo en lugar de figura. En este caso, se le transmite al alumno que su construcción es correcta pero se le sugiere si sabría generalizar su solución, es decir si podría hacer una construcción de tipo figura.

También se puede observar que hay un itinerario que podríamos llamar el ideal, donde el alumno hubiese tenido en cuenta todas las posibles formas de resolver el problema y se hubiese dado cuenta de todos los pequeños detalles involucrados en su total resolución. En este problema, por ejemplo, es relativamente sencillo llegar a dar como solución, que el centro de giro entre dos segmentos se encuentra en el punto de corte de las mediatrices de puntos homólogos (Figura 7), pero tener en cuenta los casos particulares de que dichas mediatrices sean coincidentes o paralelas, es un matiz que no se observa tan fácilmente.

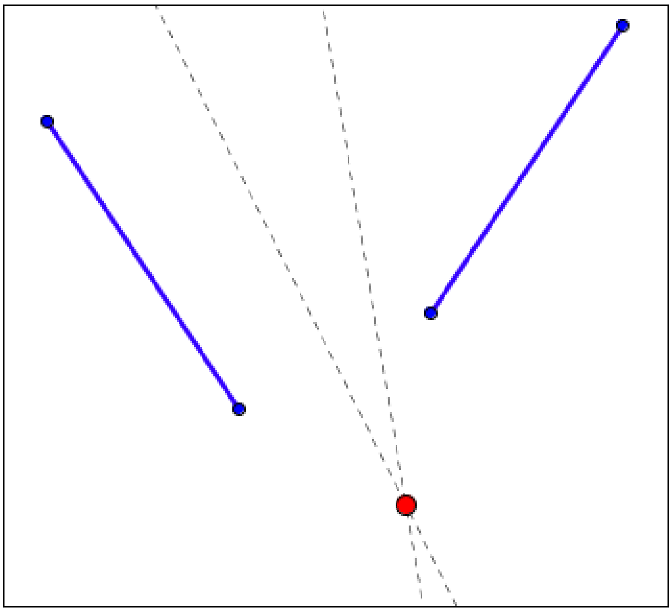


Figura 7. Situación en que las mediatrices se cortan.

En el caso particular de que las mediatrices sean coincidentes (Figura 8), que se da siempre que los segmentos sean simétricos respecto un eje, para encontrar el centro de giro hay que prolongar los segmentos para encontrar el punto de corte, entre ellos y con dichas mediatrices, porqué hay que tener en cuenta que los dos giros tienen que ser del mismo ángulo.

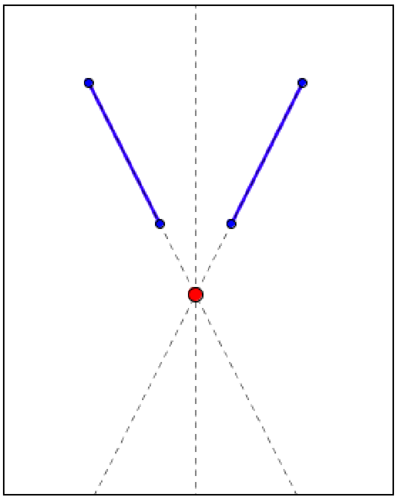


Figura 8. Situación en que las mediatrices son coincidentes.

Hay que tener en cuenta, también, que en el caso de que las mediatrices sean paralelas, que se da cuando los segmentos son paralelos y no simétricos (Figura 9), no hay un giro que transforme un segmento en su homólogo y se necesitaría una translación.

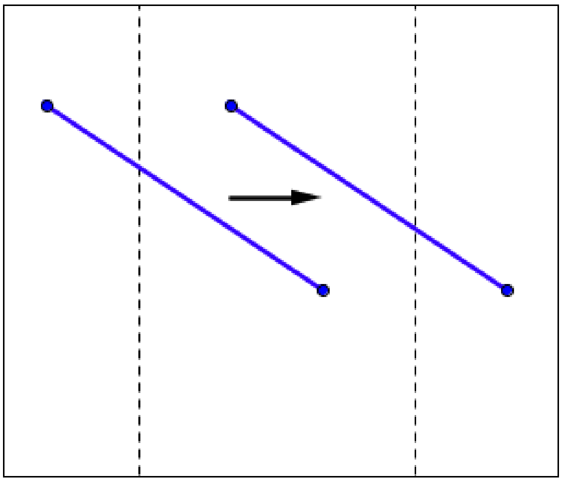


Figura 9. Situación en que las mediatrices son paralelas.

Con estas dos anotaciones, se puede ver que con los segmentos que son paralelos y que a la vez son simétricos respecto un eje (Figura 10), las dos consideraciones funcionan, si se toman como segmentos simétricos (mediatrices coincidentes), los prolongaríamos y como no se cortan porque son paralelos, no encontramos giro que transforme uno en otro. Y en el otro caso, si los consideramos como segmentos paralelos (considerando que las mediatrices coincidentes sean un caso particular de mediatrices paralelas) directamente diríamos que no existe un giro, ya que es una translación.

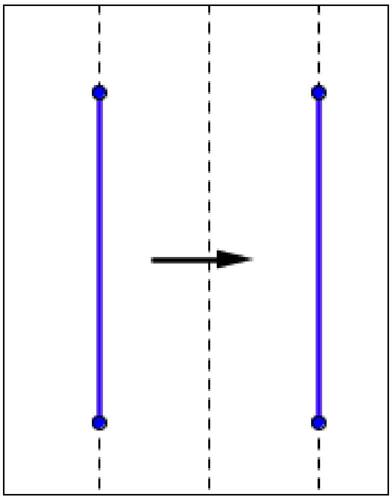


Figura 10. Situación en que las mediatrices son coincidentes y los segmentos paralelos.

Tampoco se observa fácilmente que para cada par de segmentos, si éstos no están orientados, como es el caso del enunciado de este problema, puede haber dos soluciones como se muestra en la Figura 11.

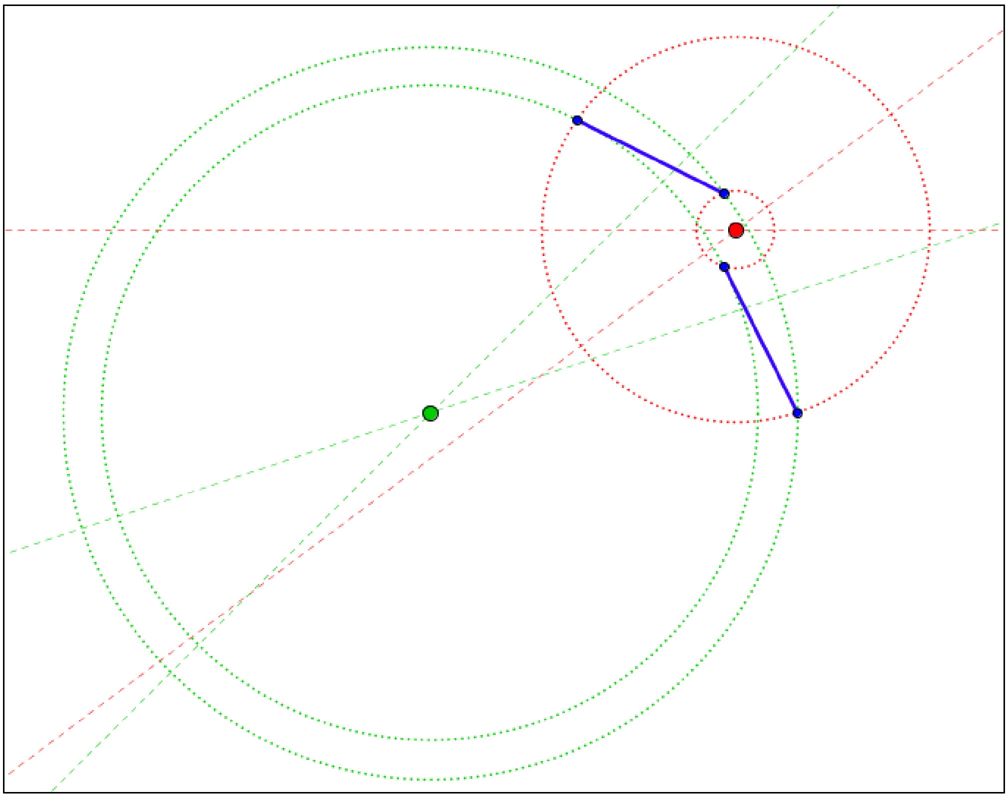


Figura 11. Doble solución en segmentos no orientados.

Un motivo por el que los problemas están diseñados de esta forma, donde se dejan las condiciones iniciales del problema tan abiertas, es para que cada pareja pueda llegar a su nivel durante la discusión de la hora de resolución de problema, así, todos los problemas que presento en el Apéndice II tienen un estilo parecido al que he mostrado en detalle.

3.3.2 Validación del instrumento

Durante el proceso de elaboración del instrumento, se fue triangulando periódicamente con expertos en seminarios organizados en el departamento a tal efecto. En este proceso se discutió sobre la forma de presentar los problemas, sobre los análisis de cada problema, sobre el orden de presentarlos y sus contextualizaciones.

3.4 Recogida de datos

Aunque el análisis de los datos posterior sea sólo de una sesión, presentaré cómo se llevó a cabo la recogida de datos completa.

Como ya he comentado anteriormente, son tres parejas de alumnos las que son protagonistas de la recogida de datos, sin olvidar el papel destacado del resto de la clase en las sesiones de puesta en común.

Para la recogida de datos del test inicial, las tres parejas fueron grabadas por tres profesores ayudantes con cámaras de vídeo y grabadoras de voz durante toda la hora de resolución de los ejercicios. También fueron recogidas las hojas de trabajo individuales hechas por los alumnos.

En las sesiones de resolución de problemas realizadas en la clase de ordenadores, donde cada pareja disponía de un equipo, cada una de las tres parejas fue grabada por profesores o alumnos de otros cursos superiores durante toda la hora de clase, con cámara de vídeo y con grabadora de voz, como se muestra en la Figura 12. También se grabó una película de las pantallas de todas las parejas de la clase para poder detectar momentos importantes de la resolución que no quedan guardados en el protocolo de construcción del GeoGebra. Los documentos de GeoGebra (.ggb), fueron entregados mediante el campus virtual de la escuela y también fueron recogidas las hojas de trabajo individuales de todos los alumnos de la clase.

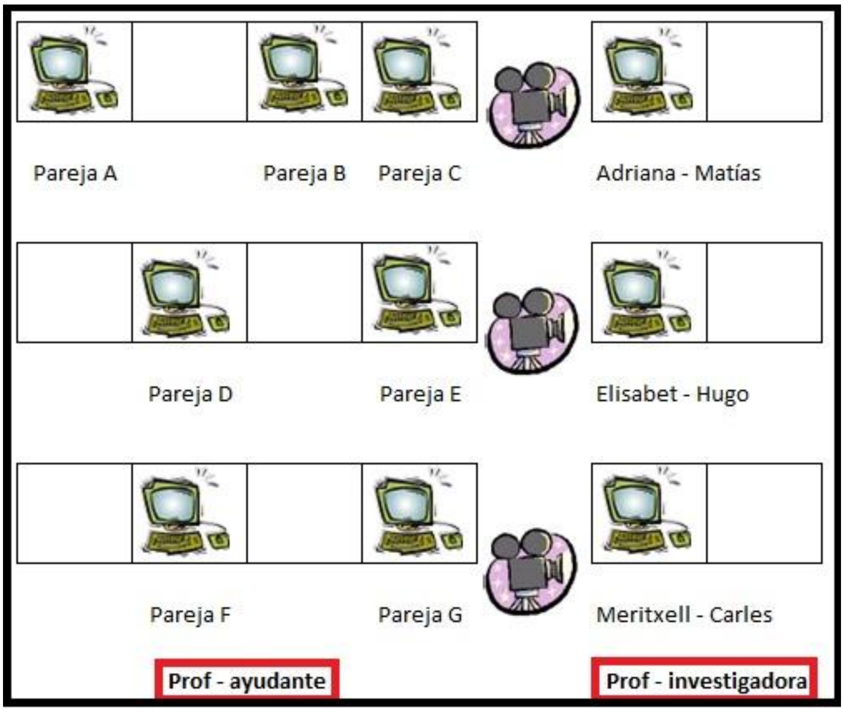


Figura 12. Distribución de la recogida de datos en las sesiones de resolución de problemas.

Durante las sesiones de puesta en común, se grabó con trípode el transcurso de la clase desde 3 ángulos distintos, como se muestra en la Figura 13, para que se pudiese ver toda la situación del aula, y además, las tres parejas tenían grabadoras de voz en las respectivas mesas.

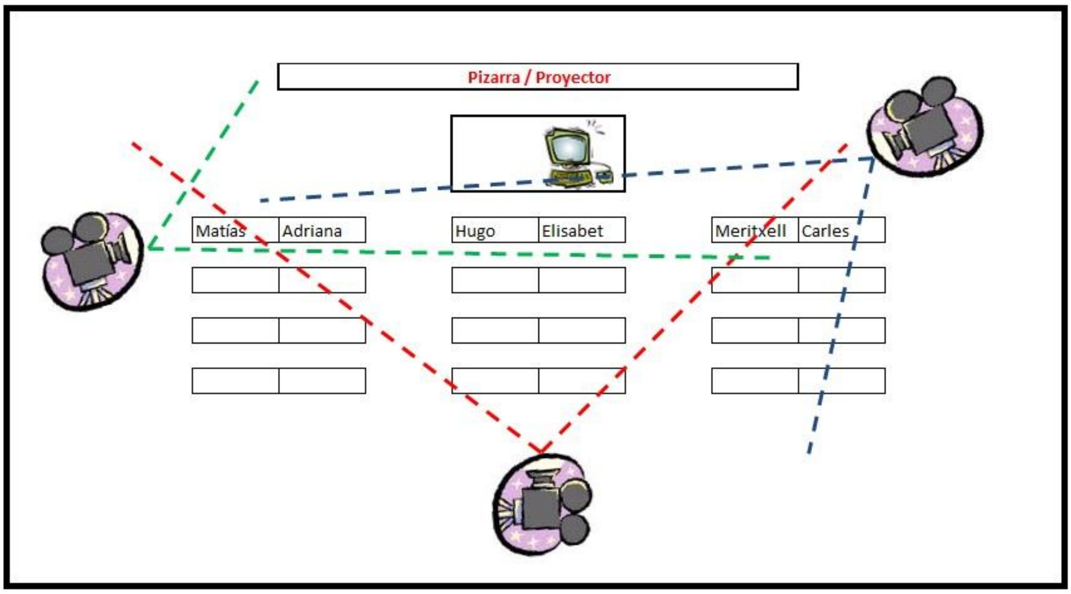


Figura 13. Distribución de la recogida de datos en las sesiones de puesta en común.

4 Análisis de datos y resultados

Como ya he comentado anteriormente, para este trabajo me centro en el análisis de una de las sesiones de puesta en común de la unidad llevada a cabo. En este apartado, muestro todo el proceso de análisis desde la fase de elección de los casos, pasando por el análisis de estos casos, la fase de elaboración de la definición a partir de los ejemplos significativos que he detectado empíricamente para ilustrar el concepto preliminar de momento clave con el que estoy trabajando y finalizando con la discusión del resultado obtenido.

4.1 Proceso de análisis

El análisis escogido para este trabajo es del tipo interpretativo para que a través de los datos empíricos se pueda inferir una definición de momento clave de aprendizaje matemático en el contexto particular en que trabajamos, que es el tema de las isometrías y con el apoyo del Software de Geometría Dinámica, GeoGebra.

Como ya he comentado anteriormente, este trabajo es un estudio de casos, donde cada caso son los momentos clave de aprendizaje escogidos dentro de la sesión estudiada y que van a ser analizados en profundidad.

4.2 Proceso de elección de los casos

Una vez recogidos los datos y escogida la sesión que iba a analizar, he partido la hora de clase en diferentes episodios y posteriormente he ido haciendo un proceso de filtraje hasta escoger los episodios que se amoldaban mejor a la definición intuitiva inicial de lo que sería un momento clave de aprendizaje. He transcrito las conversaciones y las acciones en una tabla. Las columnas las he creado tomando a los seis alumnos como individuos, teniendo en cuenta también las intervenciones del profesor y agrupando las otras intervenciones en una sola columna, obteniendo así una sola columna para el grupo clase sin contar con los 6 participantes principales. Además, he hecho tres columnas más, una de contacto con el software, otra de comentarios, para poder ir recogiendo todos los puntos interesantes que se observan y una tercera con los indicios de cambios en el aprendizaje para analizar en una fase posterior y decidir si es un buen ejemplo de momento clave. He indicado los minutos para que se pueda ver el transcurso de la sesión de clase y he añadido números de línea para que sirva como referencia en la lectura de la transcripción.

Así, una primera transcripción literal de los datos, cumple una estructura como la que se muestra a continuación en la Tabla 4.

Temps	Elisabet	Hugo	Meritxell	Carles	Adriana	Matias	Tutora	Altres	Software	Comentaris	Indicis

Tabla 4. Esquema de la transcripción de los datos.

En un análisis más detallado donde trato como caso cada uno de los indicios, modifico la tabla como describo a continuación para centrarme en el candidato a momento clave que he detectado. Hago una reorganización de las columnas para cada caso, conservando como individuos los protagonistas del cambio en el aprendizaje y sus parejas; también conservo la figura del profesor y la aparición del software cuando la hay. Finalmente creo unos conectores de influencia para dar dinamismo al momento clave y evidenciar gráficamente las diferentes mediaciones e interacciones que se han producido.

Una vez escogidos los cuatro momentos clave, el análisis de ellos se ha llevado a cabo siguiendo la estructura presentada en el marco teórico, poniendo énfasis en los dos ejes principales del trabajo, la cognición matemática y la mediación, y anotando las características y aspectos relevantes de cada uno de ellos. Durante el análisis detallado de estos momentos no sólo he seguido la estructura del marco teórico, sino que en algunos casos, las características del propio momento me han llevado a reestructurar el marco teórico, o a añadir algún aspecto importante. Así, ha sido un proceso completo de correspondencia entre la teoría y los datos empíricos.

El proceso de elección de los casos que he seguido en este trabajo igual que el método de análisis de ellos, ha surgido de ideas intuitivas, es decir, que no tengo un marco teórico específico de este apartado. Este hecho hace que se abra la posibilidad de, en un futuro, formalizar las ideas utilizadas para describir un método de análisis que podría ser interesante en próximas investigaciones.

4.3 Análisis de los casos

De la sesión analizada que trato en esta comunicación he escogido cuatro ejemplos de momentos clave que resultan interesantes por sus características básicas representadas y por la riqueza del entorno en el que están contextualizados.

A continuación voy a analizar cada uno de estos ejemplos. Quiero recordar que mi finalidad era encontrar diferentes ejemplos de momentos clave de forma exploratoria, que al principio sólo tenía la estructura de la Figura 1 para localizarlos y no tenía definidos previamente otros requisitos, motivo por el cual he dado mucha importancia a cómo se construyeron las tablas hasta llegar a obtener los ejemplos de momentos clave deseados, para mostrar el proceso de formación de estos momentos y resaltar cómo han surgido después de un estudio exploratorio. Quería que fuesen los ejemplos los que me ayudasen a crear una definición.

He escogido dos primeros momentos significativos desde el punto de vista de procesos de resolución del problema. Uno es directamente influyente en el otro, así los dos son consecutivos como vemos en la Tabla 5. Para contextualizar la situación, hay que pensar que la clase se encontraba en un punto en que acababan de conjeturar que el centro de giro de la máquina se situaría en el punto de corte de las mediatrices de los puntos homólogos (Figura 14), pero tenían un caso particular en que encontraban el giro de otra forma, prolongando los segmentos (Figura 15).

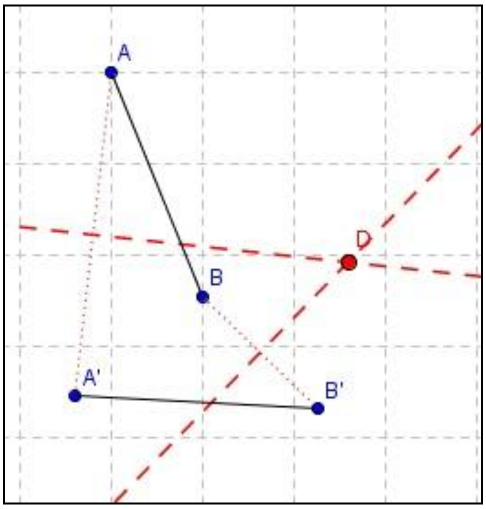


Figura 14. Donde se cortan las mediatrices.

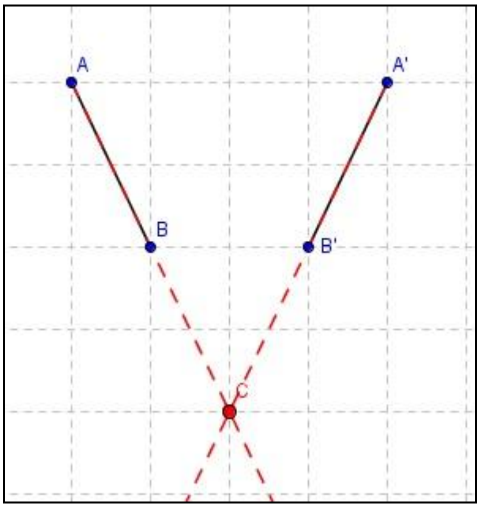


Figura 15. Donde se cortan las prolongaciones.

4.3.1 'Momento clave 1. Lo general des de lo particular'

En la Tabla 5 podemos observar un cambio en el aprendizaje de Meritxell (línea 8) y una evidencia de que su punto de partida (línea 4) no era el mismo que el punto final. Esta alumna primero empieza diciendo que la conjetura funcionaría para dos segmentos cualesquiera excepto en un caso concreto, que es el que tenemos en la Figura 15, pero después ve que se puede considerar un caso particular del general y que no hay necesidad de mencionarlo porque dice que el centro de giro estará donde se corten las mediatrices y que si en este caso son coincidentes, se cruzan en infinitos puntos y que el de la prolongación de los segmentos, será uno más. Éstas son dos de las características que tenía que cumplir la secuencia identificada para ser momento clave en el aprendizaje, que tuviera evidencias del cambio y que hubiera aprendizaje de cognición matemática.

Además, también ha habido una influencia indirecta de la profesora mediante el andamiaje que hace de la discusión en clase, que se encuentra en el punto de filtraje de las diversas ideas que han ido generando los alumnos y que ella ha comparado y evaluado. En este caso se da prioridad al aprendizaje de procesos, porque si nos fijamos, hay errores en el contenido matemático de las ideas de los alumnos: no es cierto que la máquina de giro se pueda colocar en cualquier punto de las mediatrices coincidentes como sugieren los alumnos, aunque es de esperar que en un filtraje posterior se vaya refinando el contenido matemático. Esta influencia indirecta basada en el "filtering approach" (Sherin, 2002), hace que el andamiaje sea crucial en el desarrollo del momento clave. El aprendizaje de los procesos de generalización no se podría haber aprendido si se hubiese cortado la discusión para filtrar los contenidos matemáticos erróneos.

	Min	Altres parelles	Meritxell	Carles (Parella)	Tutora	Indicis
1	0:08				Pero ahora aquí no os molesta una cosa? Tenemos que si coges 2 segmentos cualesquiera, podemos hacer esto, pero que ahora de golpe, hay un caso de estos de aquí en que hay que hacer otra cosa.	
2	0:44			Pues porqué se cortan en todos los puntos, porqué es lo mismo.		
3	0:48				Ya, pero tenemos un conjunto que es "2 segmentos cualesquiera y entonces hemos dicho que la solución seria una cosa, y ahora hay un subgrupo dentro, porqué estos(los del 2º conjunto) en concreto son una cualquiera.	
4	1:00		Pues decimos que en dos segmentos cualesquiera menos en este caso.			
5	1:10		Bueno, es que como la mediatriz es la misma…			
6	1:45	Pues como coinciden en todos los sitios, es como si se cruzaran en todos los sitios, entonces es el 2º caso, pero para todos los sitios de cualquiera de las dos mediatrices.				
7	1:56				O sea que no hace falta sacarle este caso…	

8	1:59		Es que tampoco hace falta poner esto, porqué no es que se crucen, pero como son la misma se considera que se cruzan en todos los sitios, po lo tanto, es lo mismo que allí.			Parece que entiende el concepto de generalización porque en el momento que lo encuestran caso particular, ya no hace falta tratarlo a parte.
9	2:07				O sea que lo podríamos sacar…	
10	2:09		Si…			
11	2:33				A ver, Elisabet, dime…	
12	2:34	Que si tenemos dos casos que son: si se cruzan o si son la misma, también podríamos encontrar que fuesen paralelas i que no se cruzaran.				Quiere explotar toda la casuística de las posiciones relativas de las rectas. 1.- Se cortan 2.- Son coincidentes 3.- Son paralelas.

Tabla 5. Generalización de casos particulares.

Respecto a la interacción de Meritxell con otros agentes aparte de la profesora, en este caso está la influencia de su pareja y de otros alumnos, que son los que hacen intervenciones de tipo progresivo (Cobo & Fortuny, 2005), ya que introducen procedimientos matemáticos, que a ella le influyen en el cambio que evidencia, como fijarse que en el caso particular también se pueden hacer mediatrices, y que se cortarían en el punto encontrado, aunque, también en infinitos más (línea 6). No voy a caracterizar en profundidad esta interacción pero es importante considerarla para entender la situación y, de alguna manera, forma parte de la mediación de la profesora, que utiliza los compañeros para que generen ideas.

Después de analizar este ejemplo, ya empecé a ver que la interacción con el profesor no sólo era de forma directa sino que también lo podía considerar una mediación, así este fue un punto decisivo para replantear la definición operativa de momento clave, y separar de manera clara la mediación y la interacción con el profesor, como dice Anguileri (2006), una cosa es el andamiaje, que en este trabajo se entiende como la mediación por parte del profesor y la otra es el tipo de interacción que utiliza para llevar a cabo cada una de las fases del andamiaje o del “filtering approach”, en nuestro caso. La representación gráfica del momento clave siguiendo el esquema planteado en el marco teórico sería, como se observa en el Apéndice V, un momento de aprendizaje que genera un progreso en los procesos de resolución, contribuyendo a una matematización vertical (Treffers, 1987).

También se observa que ha habido una mediación del profesor gestionando el filtrado de procesos que se ha llevado a cabo en la puesta en común.

En este caso no ha habido mediación del software ni el profesor ha hecho ninguna orquestación instrumental. En este momento de la clase, el ordenador no estaba encendido aunque como ya he descrito anteriormente, estaba disponible.

Hasta aquí, sería la caracterización de los aspectos que han influido sobre este momento de aprendizaje en concreto, pero también quiero mostrar la importancia indirecta de la interacción con el grupo clase, que hacen las intervenciones de tipo progresivo y la interacción con el profesor, que introduce preguntas que hacen cuestionar lo que dicen los alumnos.

4.3.2 'Momento clave 2. Acercándose a la demostración con conexiones entre conceptos'

En este caso consideramos que Elisabet hace una aportación muy interesante a raíz de la intervención de su compañera Meritxell. El cambio en el proceso de resolución del problema de Meritxell ha influido directamente en un cambio en el pensamiento de otra compañera, Elisabet, que hace conexiones con otro tema de geometría. Elisabet también hace un cambio en el aprendizaje de procesos. No hay evidencia del estado inicial, pero consideramos que por omisión, no había hecho la conexión anteriormente. Aparentemente la única influencia sobre ella es el comentario de su compañera, pero si ampliamos la mirada, es con todo el episodio anterior con el que ha interaccionado.

Elisabet hace la reflexión de que igual que en este caso concreto se ha acabado viendo que sí que era un caso particular, piensa que puede haber otros casos concretos que quizá hagan replantearse la conjetura (línea 12). Defiende que si algunos segmentos hacen que sus mediatrices se corten en un punto, quedando determinado el punto donde colocar la máquina, y algunos segmentos hacen que sus mediatrices sean coincidentes, determinando entonces que hay infinitos puntos donde colocarla (recordar que es un concepto matemático erróneo), pues deduce que también debe haber segmentos que estén colocados de tal forma que sus mediatrices queden paralelas y que habría que pensar qué pasaría con la máquina.

Vemos pues que hay un enriquecimiento de los procesos de resolución del problema de demostración, gracias a que ha relacionado la resolución que estaban dando con el concepto de posiciones relativas de las rectas, pero que a su vez, también hay contenidos matemáticos implícitos que van siguiendo un proceso de filtraje con la ayuda del andamiaje de la profesora. Hago notar que la gestión de la profesora basada en la generación de nuevas ideas es un punto muy importante, generando en este caso conexiones que implican una evolución de procesos, porque en este ejemplo, si hubiera filtrado los conceptos matemáticos erróneos (Sherin, 2002), me aventuro a conjeturar que no se hubiera llegado a dicho comentario.

Según este análisis, se refuerza la idea de la importancia de la mediación del profesor. También surgió la necesidad de añadir el elemento “Relaciones / Conexiones” en el eje de cognición matemática, porque en este caso, observé que había diferencias entre hacer un aprendizaje de procesos y relacionar el problema con otros conceptos conocidos, aunque esto influya directamente en una mejora del proceso de resolución del problema.

Así, siguiendo la definición creada, la representación de este segundo momento clave de aprendizaje identificado sería, como se observa en el Apéndice VI, un momento de aprendizaje donde se genera una conexión con otros conocimientos que no son propios del tema de las isometrías, contribuyendo a una matematización horizontal. También se observa que ha habido una mediación del profesor basada en la gestión del proceso de generación de ideas, en este caso sin una influencia de su interacción ya que es la alumna que empieza a generar ideas a partir del proceso de filtraje anterior en el que sí que ha habido una interacción con el grupo clase.

En este momento clave de aprendizaje tampoco ha habido mediación del software por el mismo motivo que en el ejemplo anterior.

A continuación analizaré dos momentos clave que ocurren en paralelo, por eso las transcripciones están representadas en una sola tabla.

4.3.3 ‘Momentos clave 3 y 4. Refutar una conjetura con visiones distintas. Particularización y Generalización.’

Antes de analizar el episodio, contextualizo que una vez los alumnos ya habían resuelto el problema de manera general, la profesora decide filtrar los contenidos matemáticos erróneos lanzando la pregunta: “En este caso (Figura 16) todos veis claro que podemos poner la máquina en cualquier punto de las mediatrices?” (línea 1)

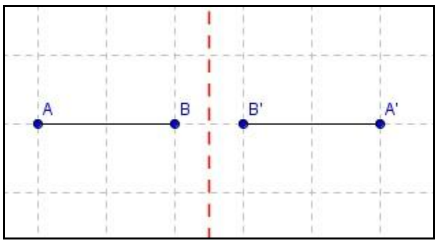


Figura 16. Caso particular de mediatrices coincidentes.

Este ejemplo de momento clave, tiene la peculiaridad de que son dos momentos con la estructura requerida que suceden en paralelo pero con características distintas y justamente por ese motivo los hemos querido mostrar aquí. Muestro primero la Tabla 6 y a continuación haré el análisis de los dos momentos.

	Min	Elisabet	Hugo	Altres parelles	Matias	Tutora	Software	Indicis
1	12:24					Este caso (- -), todos veis claro que podemos poner la máquina en cualquier punto?		
2	12:31	Si		Si, es lo mismo... La mediatriz coincide	Si			
3	12:38		Tiene que estar en el punto medio de los dos...					
4	12:43					Si estuviése aquí la máquina... (la pinto en la pizarra entre los dos segmentos (- · -))		
5	12:44		Entonces funciona					
6	12:45					Entonces cuantos grados la haríais girar?		
7	12:47		180					
8	12:51					Y si la pongo aquí la máquina? (A la pizarra -.-)		
9	12:53		No se puede					
10	12:54	Si que se puede! (Contestándole a su compañero)						
11	12:54		Como lo quieres hacer? (le dice a Elisabet)			Que le tengo que decir?		
12	12:55			180				
13	12:56			No, menos!				
14	12:56			No, 180, no!				
15	12:57					Si giro esto 180, respecto aquí, (a la pizarra hago el gesto de lo que hará), donde voy a parar?		
16	13:03					Encima de ahí?		
17	13:04	Si		Si..., No...				
18	13:12		Ves?					
19	13:14	Si, pues no hacemos 180!						
20	13:15					Doncs quants feu?		
21	13:17		NO, pero es que entonces te quedará... Si haces menos te quedará... así como hacia arriba! (le dice a Elisabet)		No lo sabemos...			
22	13:31				Pero tampoco pide que... Pide que pongas la máquina donde se pueda girar, no pide que cuánto se puede girar...			
23	PAUSA						Hacemos GeoGebra en el proyector (Dibujamos la situación (- -) con el centro en un punto cualquiera.	
24	1:56					Aplícale un giro de esta figura respecto el centro		
25	2:03					Cuántos grados?		
26	2:05		180					
27	2:07					Prueba 180 primero, a ver que pasa...		
28	2:10			Se irá allí a bajo...				

29	2:12			Porque es respecto el punto...				
30	2:27	Entonces es imposible				Entonces que pasa?		
31	2:30				Es que no pide los grados...			
32	2:37					Pues hacemos una cosa, hacer una barra deslizadora...		
33	3:25	Se gira, pero no así!						
34	3:28					Por lo tanto, que está pasando aquí?	Con GeoGebra hacemos la situación	
35	4:30	Entonces en este caso no se puede hacer en cualquier punto de la mediatriz, tiene que ser en el punto medio de la recta que une los dos segmentos						
36	4:45					Sólo podrías poner la máquina allí?		
37	4:47	Si						
38	4:48					Pero os acabais de cargar vuestra hipotesi inicial de "Dos segmentos cualesquiera, pondré la máquina donde se corten las mediatrices de los puntos"		
39	4:54	Ya...						
40	5:00	Si son de la misma recta sólo se cortan en un punto						
41	7:20					Por lo tanto os ha quedado colgado el caso de que las dos mediatrices coincidan, eh? Aquí está pasando algo estraño que no acabáis de ver qué está pasando!		
42	7:34	Normalmente lo podemos poner en cualquier punto, menos cuando estan aliniados.						Evidencia final de que Elisabet lo ve como un caso particular "Estar aliniados".
43	8:02				Cuando son simétricos!			Evidencia final de que Matías lo ve como caso particular de "ser simétricos"
44	8:03					Cuando son simétricos... Ah, es que es verdad, cuando son simétricos, al final que passa?		
45	8:08	Esos són simétricos i puedes ponerla a cualquier sitio.						
46	8:10				NO!			

Tabla 6. Refutar una conjetura con visiones distintas.

Voy a analizar los momentos clave de aprendizaje identificados en este episodio protagonizado por Elisabet y Matías, respectivamente. Al principio, tanto Elisabet como Matías, ponen de manifiesto que creen que cuando los dos segmentos están alineados, la máquina de giro se puede situar en cualquier punto de las mediatrices coincidentes. Incluso contrariamente a Hugo, la pareja de Elisabet, que opina que no (línea 3), ella se reafirma en su opinión de que se puede colocar en cualquier punto(línea 10).

Después, Elisabet influenciada por la orquestación de la profesora, que en este caso pone énfasis en los contenidos matemáticos, acepta que el giro no va a ser de 180º.

De todas maneras, no ve la falsedad de su conjetura, simplemente considera que será otro ángulo de giro. Cuando la profesora insiste en preguntar qué ángulo sería si no fuesen 180º, Matías dice que no lo preguntan en el enunciado (línea 22), como si no se pudiese determinar. Esta insistencia por no aceptar que el centro de giro no se puede poner en cualquier punto, puede venir influenciado también por el hecho de que en este momento de la discusión nos encontramos dentro de una demostración empírica en la que han hecho un ejemplo genérico, pero que a petición de algunos compañeros, en la puesta en común se están haciendo experimentos cruciales (Gutiérrez, 2005) que se puedan usar de contraejemplos para refutar la conjetura y es posible que ellos tengan un cierto recelo a que se evidencie que la conjetura no era correcta. En este punto quiero hacer notar que aunque haya habido interacción con la profesora, no puedo marcar esta interacción como aspecto influente en el momento clave, porque como explicaré a continuación, no es finalmente esta conversación la que hace cambiar de opinión a los alumnos.

Un compañero propone construir la situación con GeoGebra, y algunos alumnos ya prevén que el segmento homólogo no coincidirá con el que buscan. Elisabet ha tenido la influencia del software, que en este caso lo han utilizado para comprobar un hecho concreto y dice que entonces es imposible colocar el centro de giro en cualquier punto de la mediatriz (línea 30). Notemos que ha sido más decisivo para ella el hecho de ver que en el GeoGebra no sucede, que las explicaciones que estaba dándole Hugo, su pareja, o los intentos de la profesora haciéndole preguntas para reflexionar.

Matías sigue con su idea de que con el GeoGebra no han visto que no se pudiese con ningún ángulo, sólo el de 180º. Y esta intervención provoca que la profesora haga una orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010; Trouche, 2005), para que el hecho de no tener un grado alto de instrumentación (Iranzo & Fortuny, 2009) no condicione la fase ascendente (Arzarello, Micheletti, Olivero, & Robutti, 1998) en la que se encuentran. Así, la profesora les propone que usen la barra deslizadora y les da alguna indicación de cómo se creaba. Elisabet, después de ver que con la barra deslizadora del GeoGebra tampoco funciona, es decir, que no hay ningún grado de giro que lleve el segmento sobre su esperado homólogo, se convence definitivamente y hace diversas intervenciones donde transmite que el caso en el que los segmentos están alineados, hay que tratarlo a parte y que la solución sólo será el punto medio de los puntos homólogos. Por lo tanto, aquí se evidencia un cambio, un aprendizaje de un concepto nuevo, pero no conecta esta solución con otros casos, es decir, que no generaliza sino que ve como excepción sólo ese caso concreto (línea 42). En cambio, Matías, ve esta excepción como un caso particular de todos los pares de segmentos simétricos (línea 43). Aquí sí que ha habido una conexión con otros problemas similares; él ha buscado como serían todos los enunciados de pares de segmentos que tuviesen las mediatrices coincidentes.

En este caso se evidencia que aunque los dos alumnos parten, *a priori*, del mismo estado inicial, estando presentes en la misma puesta en común e influyéndoles las mismas variables, se puede observar que estas mismas variables les influyen de formas distintas y llegan a estados finales diferentes.

En este caso, como son dos alumnos y con aprendizajes distintos, he representado los momentos de aprendizaje por separado, el de Elisabet, en el Apéndice VII y el de Matías en el Apéndice VIII.

Así, vemos que el momento de aprendizaje protagonizado por Elisabet, genera unos conceptos nuevos en ella mientras que Matías genera conceptos distintos (más generalizados) a la vez que hace una conexión con otras situaciones similares.

En los dos momentos de aprendizaje, en este caso, por el hecho de suceder en paralelo, la mediación que se ha dado en el espacio de tiempo es la misma, aunque haya influido en cada alumno de forma distinta. Si muy interesante, no es objeto de mi estudio caracterizar el tipo de influencia sobre cada estudiante de la mediación, pero se puede tener en cuenta para futuras investigaciones.

En este caso la mediación se caracteriza por aspectos relacionados con el software, ya que los alumnos lo usan como instrumento para comprobar unas ideas, y por aspectos relacionados con la mediación del profesor, por un lado haciendo una orquestación instrumental para facilitar la génesis instrumental de los alumnos y por otro lado gestionando la fase de filtrado de conceptos que era necesaria.

Con estas cuatro caracterizaciones de estos episodios, he acabado de perfilar la definición operativa de momento clave en el aprendizaje y la he aplicado a estos cuatro ejemplos para comprobar su operatividad.

4.4 Proceso de elaboración de la definición

Tal y como he presentado a lo largo del trabajo, la definición la he ido construyendo y redefiniendo después de un proceso cíclico entre las revisiones teóricas y los análisis de las experiencias prácticas. Empezando con un objetivo general similar pero con unos objetivos específicos demasiado generales y con un marco teórico demasiado amplio, comencé el análisis de los datos, pero la reflexión de lo que había obtenido me llevó a concretar y ordenar el marco teórico y a volver a revisar los análisis bajo el nuevo punto de vista. Una vez realizado este proceso cíclico como comentaba anteriormente, me decidí a estructurar los objetivos secundarios de la investigación, el marco teórico, el análisis de los datos y la definición construida de manera coherente, siguiendo en todos los casos los dos ejes principales que ha acabado teniendo la investigación, cognición matemática y mediación, dejando en un segundo plano, pero no olvidado, el eje de interacción.

Después de tener en cuenta todas estas consideraciones, tanto los datos analizados hasta ahora como la teoría estudiada me llevan a presentar la siguiente definición operativa, cuya representación gráfica en forma esquemática se puede ver en el Apéndice IX.

*En el marco de esta investigación, un **momento clave de aprendizaje** es una oportunidad de aprendizaje "aprovechada" por los alumnos en el que:*

*1.- Se produce una **evolución de los conocimientos de los alumnos**, que puede ser:*

*de **conceptos** (como se observa en los momentos 3 y 4),*

*de **procesos** (momento 1) y/o*

*de **relaciones y conexiones** (momentos 2 y 4).*

*2.- Tiene que intervenir como mínimo la **mediación:***

*la mediación **del software**, es la que influye directamente en*

*la **génesis instrumental** del alumno (como se observa en los momentos 3 y 4) y*

*la mediación **del profesor**, que puede consistir en:*

*una representación didáctica de la **orquestación instrumental**, para facilitar la génesis instrumental (momentos 3 y 4) o bien,*

*en un andamiaje para seguir el proceso de "**filtering approach**" en alguna de las distintas fases: en la generación de ideas, (momento 2), en la evaluación y comparación de ideas, en el filtrado de conceptos (momentos 3 y 4) y en el filtrado de procesos (momento 1).*

Quiero hacer notar que todos los aspectos relevantes en la definición operativa, están en consonancia con los constructos presentados por los autores del marco teórico escogido para esta investigación. También quisiera añadir que en particular, cuando hablamos del proceso de filtraje de Sherin (2002), que ella estructura en tres fases, he observado una subdivisión de la tercera, diferenciando entre filtrado de conceptos y filtrado de procesos, que se podría considerar como un refinamiento de sus tres categorías.

Hay que tener en cuenta que la definición operativa construida, está enmarcada en un contexto de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Simon, 1995) y que el momento clave de aprendizaje que se define forma parte de uno de los itinerarios del árbol de problemas asociado (Cobo, 1998). En este trabajo, como todos los casos analizados pertenecen al mismo punto de la THA, no es significativo, pero habrá que tenerlo en cuenta en futuras investigaciones.

Para analizar los datos obtenidos y acceder a los momentos de aprendizaje de los alumnos, hay que recordar que he utilizado la interacción con la pareja (Kieran, 2001), con el grupo clase (Douek, 2005) y con el profesor (Anghileri, 2006), pero que no constituye uno de los ejes principales de la investigación.

La definición presentada está fundamentada experimentalmente ya que se basa en los análisis de los datos empíricos recogidos para tal propósito. He expresado los cuatro momentos clave según la definición operativa que he construido como muestro a continuación y también los he representado como se puede observar gráficamente de un modo más esquemático en los Apéndices V, VI, VII y VIII, para justificar que de la definición que he inferido, se puede volver a los datos.

El *momento clave 1: Lo general des de lo particular*, donde Meritxell hace la aportación de incluir un caso particular en una solución general, (las transcripciones se pueden observar en las líneas 4 y 8 de la Tabla 5), lo caracterizamos como un aprendizaje de procesos dentro del eje de cognición matemática. Siguiendo los términos de matematización vertical planteados por Treffers, en este caso, se da una generalización por el hecho de integrar un caso dentro de un modelo. Este momento clave está mediado por el profesor al gestionar una interacción del alumno con el grupo clase durante la fase de filtrado de procesos de la puesta en común. Este filtrado de procesos es la tercera fase de un proceso planteado por Sherin (2002) que está en consonancia con la gestión del profesor en los datos analizados. Estas dos características, aprendizaje de procesos y fase de filtraje, responderían a los dos ejes principales de la definición, cognición matemática y mediación. Indirectamente, se puede observar la interacción con el grupo clase, que es el vehículo que hace que los alumnos expresen sus ideas (Douek, 2005).

El *momento clave 2: Acercándose a la demostración con conexiones entre conceptos*, donde Elisabet propone un caso particular que quizá podría entrar en contradicción con la conjetura hecha hasta el momento, (la transcripción se puede observar en la línea 12 de la Tabla 5), lo caracterizamos como una aportación de relaciones y conexiones, que expresado en los términos de Treffers, decimos que ha descubierto relaciones y regularidades que le han llevado a proponer esa idea. El momento clave de aprendizaje ha sido mediado por el profesor, gestionando la fase de generación de ideas de la puesta en común posterior a la fase de filtrado de procesos que acaba de llevarse a cabo, y que entra en consonancia con lo que expone Sherin (2002) en su artículo. Lo ideal es que el proceso de filtrado se vaya repitiendo periódicamente hasta lograr los objetivos previstos.

El *momento clave 3: Refutar una conjetura con visiones distintas - Particularización*, donde Elisabet aprende que el caso en que se está trabajando no cumplirá la conjetura que habían propuesto, (las transcripciones se pueden observar entre las líneas 2 y 40 de la Tabla 6), lo caracterizamos como un aprendizaje de conceptos, concretamente una formulación de un concepto matemático nuevo, siguiendo la clasificación de Treffers. En este caso, el momento clave está mediado tanto por el software como por el profesor. Está situado en la fase de filtrado de conceptos, particularización de la tercera fase de Sherin (2002) y esta mediación del profesor ha sido complementada con una orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010; Trouche, 2004) que ha ayudado a progresar en la génesis instrumental (Rabardel, 1995), ya que han hecho uso del software para realizar una comprobación. En este ejemplo tenemos pues una evidencia de aprendizaje de cognición matemática, que en este caso se ha contribuido en una matematización vertical (Treffers, 1987). Y además, este ejemplo, es el primero que tiene mediación de dos tipos, del profesor y del software y en ambos casos se han podido caracterizar los aspectos relevantes en concordancia con el marco teórico.

El *momento clave 4*, *Refutar una conjetura con visiones distintas - Generalización*, donde Matías aprende que el caso en el que se está trabajando, y en todos los que tienen las mismas características (simétricos), no se cumplirá la conjetura que habían propuesto, (las transcripciones se pueden observar entre las líneas 2 y 43 de la Tabla 6), lo caracterizamos como un aprendizaje de conceptos y una conexión o relación, es decir, en este ejemplo, se evidencia, al mismo tiempo, matematización vertical y horizontal (Treffers, 1987). Por un lado, formula un concepto matemático nuevo, pero al mismo tiempo, reconoce aspectos isomorfos en diferentes problemas y eso le lleva a hacer una generalización. En este caso, este momento clave, está mediado por los mismos aspectos que el momento anterior por el hecho de que sucedan paralelamente en espacio y tiempo.

Como se puede observar, todos los momentos detectados se pueden caracterizar de forma distinta, pero todos ellos se ciñen a la descripción de la cognición matemática alcanzada y a los aspectos de la mediación influyente, ejes principales de la definición operativa.

Aunque esta definición parece incorporar todos los aspectos relevantes que se dan en un momento clave de aprendizaje, soy consciente de que en un futuro, después de analizar distintas sesiones dentro de la unidad didáctica, la definición deberá sufrir más refinamientos y habrá que seguir el proceso cíclico del que hablaba, tanto al analizar más sesiones de puesta en común, como al analizar las sesiones de resolución de problemas con trabajo por parejas, que me aventuro a predecir que serán las que nos aportaran más especificidad en los aspectos relevantes de mediación del software por ser el entorno en el que trabajan.

4.5 Validez y transferibilidad del análisis de datos y los resultados

Durante el proceso de análisis de los datos he hecho triangulaciones con expertos para validar los resultados obtenidos. Se ha discutido la elección de los momentos clave y la interpretación que se ha hecho de cada uno de ellos.

De todas formas, todos los resultados obtenidos los he argumentado basándome en las evidencias de los datos representados en la Tabla 5 y en la Tabla 6.

Quizá una de las debilidades de esta investigación, es que la parte experimental está basada en el análisis de una sola hora de clase y falta contrastar los resultados obtenidos analizando más datos para tener más evidencias. Teniendo toda la unidad didáctica podría ampliarse el análisis de datos, pero por otro lado, al ser una investigación en curso, soy consciente de que en un futuro próximo se va a realizar.

Por el momento, empezando con esta definición refinada a partir de los resultados obtenidos, se pueden caracterizar los momentos clave del aprendizaje en el contexto tratado. En futuras investigaciones o en la continuación de ésta, podré usar esta definición para que sirva como base de mi marco teórico y para analizar en profundidad las diferentes características de los distintos momentos clave que se dan a lo largo de una secuencia didáctica como la presentada en este trabajo, así no es una investigación cerrada y puede tener implicaciones prácticas en el futuro.

5 Conclusiones

Motivada por la pregunta de investigación global planteada, he ido desarrollando el trabajo para dar respuesta a la pregunta de investigación concreta de determinar algunas de las influencias y características más relevantes en el aprendizaje matemático en el contexto estudiado. En este sentido, el objetivo planteado de crear una definición operativa y los sub-objetivos de determinar aspectos sobre cognición matemática y mediación, han guiado la construcción de la respuesta a la pregunta de investigación.

La definición operativa se ha construido a partir del análisis de los datos empíricos y de una revisión del marco teórico, como he detallado en el apartado de resultados. Así, se han cumplido los objetivos de la investigación:

Los aspectos sobre cognición matemática relevantes en la caracterización de momentos clave que se han desprendido del análisis de los datos han sido los conceptos y procesos aprendidos por los estudiantes y las conexiones o relaciones realizadas por ellos, que entran en consonancia con los aspectos de matematización vertical y horizontal que expone Treffers en su tesis (1987).

Los aspectos sobre mediación relevantes en la caracterización de momentos clave que se han desprendido del análisis de los datos han sido la orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010) y el andamiaje (Sherin, 2002) realizados por parte del profesor y la génesis instrumental (Rabardel, 1995) de los alumnos promovida por el software. Estos conceptos han sido directamente usados a partir de las referencias utilizadas en este trabajo ya que desde el principio se tuvieron en consideración en el marco teórico.

Los aspectos tenidos en cuenta en estos dos ejes de la definición, juntamente con la idea de considerar un momento clave de aprendizaje como una oportunidad de aprendizaje “aprovechada” en que se produce una evolución de los conocimientos de los alumnos, constituyen la definición operativa que he construido.

De este modo, el cumplimiento de los sub-objetivos y del objetivo, dan respuesta a la pregunta de investigación planteada, ya que las características más influyentes en un momento clave de aprendizaje matemático son las que se han tenido en cuenta para construir la definición.

Así como la pregunta de investigación global fue la misma desde el principio, la pregunta de investigación concreta se perfiló *a posteriori*, una vez decidí qué parte de los datos analizaría para el presente trabajo. Del mismo modo, el objetivo principal de construir una definición, lo tuve presente desde una fase muy inicial de la investigación, aunque no fue hasta que no se analizaron los primeros datos y se hizo una revisión del marco teórico que no se acabaron de perfilar los dos sub-objetivos, decidiendo finalmente, que el eje de la interacción social no sería objeto de estudio en este trabajo.

Una vez realizadas las conclusiones teóricas a las que he llegado, me gustaría plantear una revisión metodológica ya que la definición teórica de momento clave de aprendizaje que he construido, depende de distintas decisiones que he ido tomando a lo largo del proceso de diseño de la metodología del trabajo. Como ya he dejado claro en diferentes apartados de este trabajo, es una definición basada en los datos experimentales recogidos en un contexto concreto y hay que ser consciente de que si se hubieran tomado decisiones distintas, la definición podría verse alterada.

He hecho una tabla (Tabla 7) para ver esquemáticamente como se reflejan los datos en los resultados obtenidos y la representatividad de los datos empíricos en los constructos teóricos en que se ha basado la definición. En ningún caso pretende ser base de ningún estudio estadístico, aunque el hecho de presentar el total pueda parecerlo.

Momentos Clave de Aprendizaje	COGNICIÓN MATEMÁTICA			MEDIACIÓN			INTERACCIÓN SOCIAL		
				PROFESOR		SOFTWARE			
	CONCEPTOS	PROCESOS	CONEXIONES /RELACIONES	ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL	FILTERING APPROACH	GÉNESIS INSTRUMENTAL	PAREJA	GRUPO	PROFESOR
MC1		X			X			X	X
MC2			X		X			X	
MC3	X			X	X	X		X	
MC4	X		X	X	X	X		X	
TOTAL	**2**	**1**	**2**	**2**	**4**	**2**	**0**	**4**	**1**

Tabla 7. Esquema de la presencia de los datos en los constructos teóricos de la definición

Como puntos destacados querría comentar la breve aparición del software en los datos analizados, pero creo que es por el hecho de que dentro de la trayectoria hipotética de aprendizaje nos encontramos en una sesión de puesta en común, donde la presencia física del ordenador es reducida. En el análisis posterior de sesiones de trabajo por parejas, se espera que la presencia de la génesis y la orquestación instrumental esté más presente en los ejemplos. El mismo razonamiento lo uso para justificar el hecho de que aunque los datos no evidencien presencia de interacción con la pareja, haya mantenido este concepto en el marco teórico.

También he mantenido en el marco teórico la idea de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Simon, 1995) y la de los árboles asociados de Cobo y Fortuny (2005), ya que aunque no se vea reflejada en los resultados, si que ha estado muy presente en todo el diseño metodológico.

Otro aspecto que me ha llamado la atención, es que el hecho de trabajar en un entorno de transformaciones en el plano, no está muy presente en el análisis de los datos ni en los resultados. Por un lado se podría pensar que el hecho de que no sea significativo quiere decir que la definición puede ser válida para el estudio de otros temas matemáticos, y por otro lado se podría pensar que es sólo en este caso concreto ya que en la sesión analizada, justamente se trabaja sobre un sólo problema, y además es muy especial en cuanto que la dificultad está en la coherencia matemática del problema y no en los conceptos isométricos involucrados en él. Así, la conclusión sería que son necesarias futuras investigaciones que planteen un estudio en profundidad de este tema.

Después de estos comentarios, defiendo la idea que son necesarias futuras investigaciones siguiendo esta línea de trabajo y en ellas es necesario analizar las otras partes de los datos recogidos para darle una visión más amplia a la definición.

5.1 Implicaciones didácticas

Una de las implicaciones didácticas principales de este trabajo, es aproximar a los profesores a una visión de momentos clave entendidos como los he explicitado en la definición presentada y que los profesores tomen conciencia de todos los aspectos que caracterizan la mediación por su parte, que influyen directamente en el aprendizaje de los alumnos, como se observa en los diferentes momentos analizados. También es importante que tomen conciencia de los aspectos mediados por el software que influyen en el aprendizaje de sus alumnos.

Como implicación didáctica, quizá secundaria, porque no era el objetivo del trabajo, me gustaría dar salida a la unidad didáctica diseñada, que como ya he comentado en diversos puntos de este trabajo, no ha sido diseñada únicamente con fines de la investigación. Aunque hay que tener en cuenta que la unidad no sólo se basa en la secuencia de problemas diseñados, si no que forma parte de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y está basada en unos análisis exhaustivos de cada uno de los problemas, igual que también lleva asociada una orquestación instrumental implícita en el diseño, que también se tendría que transmitir a los profesores para que no sólo se quedaran con los problemas utilizados.

Bibliografía

A. Libros y artículos básicos para el trabajo (incluye revistas electrónicas)

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33-52. doi:10.1007/s10857-006-9005-9

Cobo, P., & Fortuny, J. M. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 55-70). Presented at the SEIEM, Córdoba, Spain.

Douek, N. (2005). Communication in the mathematics classroom. En *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Comunication* (págs. 145-172).

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., & Gisbergen, S. (2010). Instrumental orchestration: theory and practice. En F. Arzarello (Ed.), *Proceedings of Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Presented at the CERME 2009, Lyon, France.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1), 187-228.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, France: Armand Colin.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(3), 205-233.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction. The Wiskobas project*. Kluwer Academic Publishers.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

B. Libros y artículos complementarios

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. En *Proceedings of 22th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, págs. 24-31). Presented at the PME, Stellenbosch, South Africa.

Carrillo Yáñez, J. (2003). Resolución de problemas: su concreción en algunos recursos clásicos. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 151-161.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superfícies planas. Un estudio de casos.* Universitat Autònoma de Barcelona.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 27-44). Presented at the SEIEM, Córdoba, Spain.

Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(3), 433-446.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1.2), 165-210.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (págs. 137-162). New York: Springer.

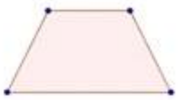
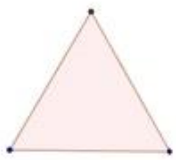
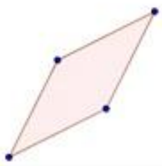
Índice de figuras

Índice de tablas

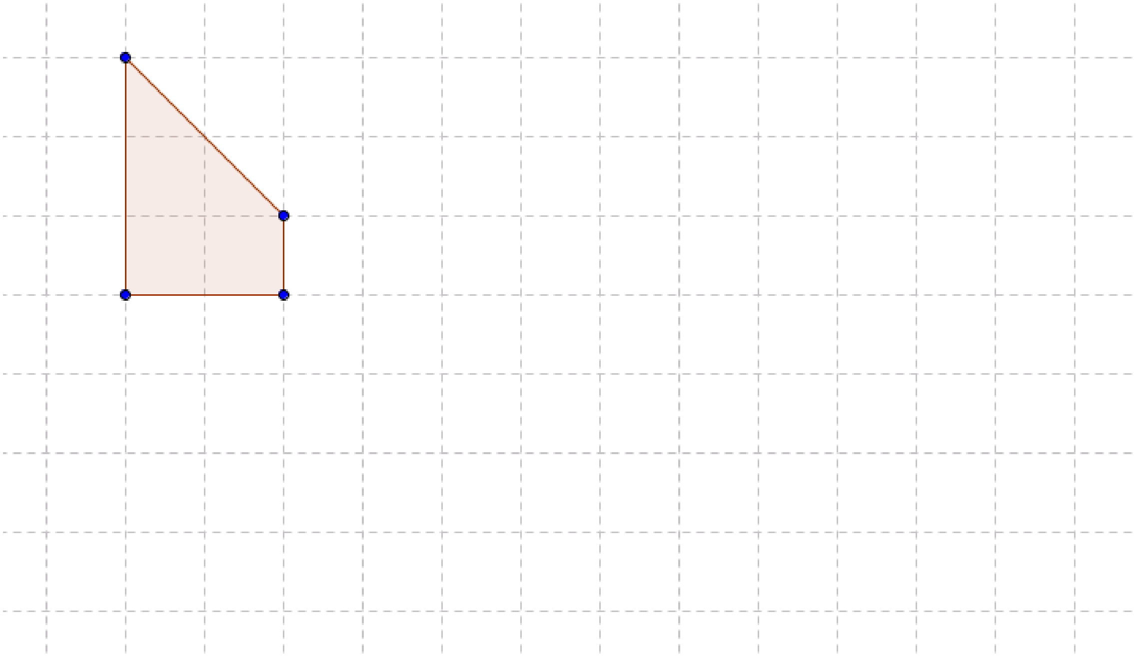
Apéndice I: Ejercicios del test inicial

1.- Recordeu que una recta és un eix de simetria d'una figura quan la simètrica de la figura respecte d'aquesta recta és la mateixa figura. Marqueu tots els eixos de simetria que trobeu a les figures següents i definiu-los amb les vostres paraules, com si no tinguéssiu la figura davant.

H	F	E	O	N

2.- Donada la figura següent, traslladeu-la horitzontalment 8 unitats cap a la dreta. A continuació, traslladeu verticalment la figura obtinguda 4 unitats cap avall.



Expliqueu amb les vostres paraules com ho faríeu per passar de la 1a figura a la 3a **directament per un altre camí.**

3.- Observeu un rellotge:

a) De quants graus és el gir que fa la busca dels minuts en un quart d'hora?

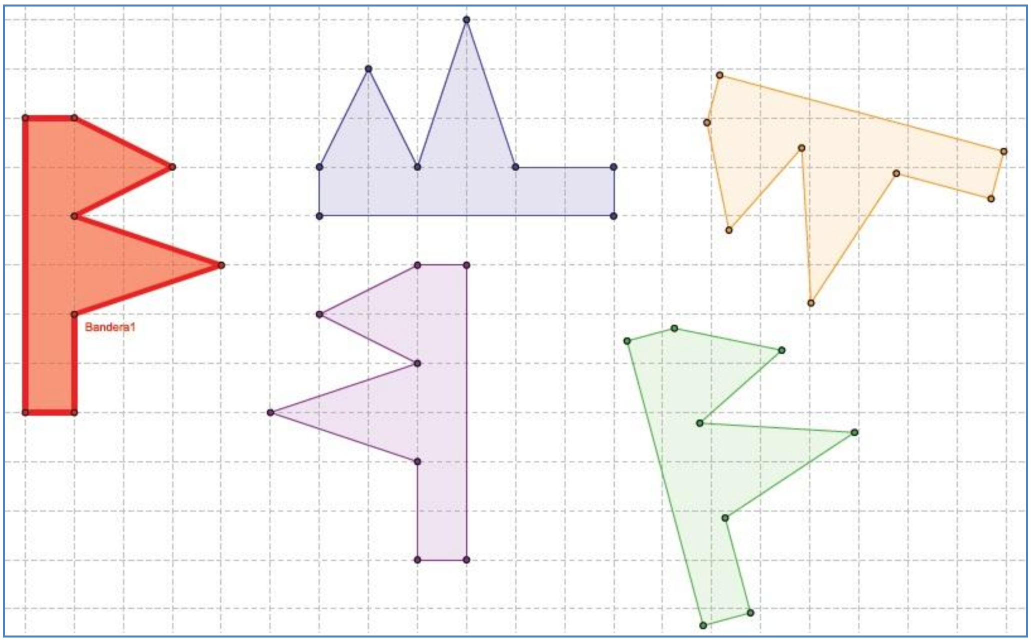
b) De quants graus és el gir que fa la busca dels minuts en una hora i mitja?

c) De quants graus és el gir que fa la busca dels minuts si hem d'avançar mitja hora el rellotge?

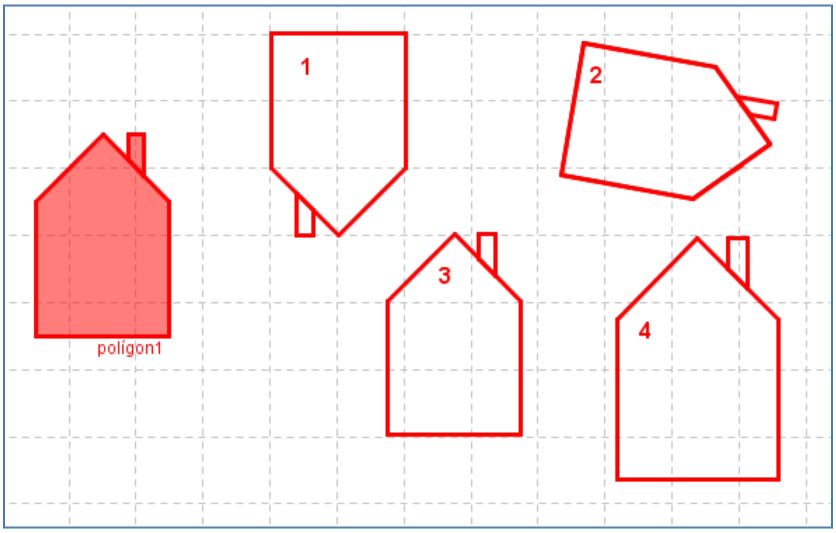
d) De quants graus és el gir que fa la busca dels minuts si hem d'endarrerir mitja hora el rellotge?

4.- Imagineu que la **Bandera1** la teniu retallada amb cartolina. Quines d'aquestes figures les podríeu aconseguir arrossegant la **Bandera1**, sense aixecar-la de la taula? Marqueu-les al dibuix.

Trobeu alguna característica comú de les figures que heu marcat i alguna característica de les figures que no heu marcat.

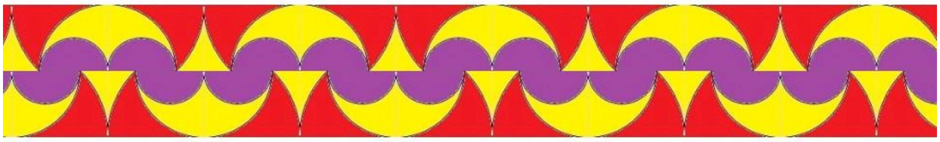


5.- Quina o quines d'aquestes figures no es poden obtenir fent simetries, translacions i girs del polígon inicial? Per que?



6.- Un fris és un tipus d'ornamentació consistent en una repetició d'elements decoratius al llarg d'una banda.

Donat el fris següent, trobeu la part d'imatge més petita que pugueu, amb la qual podríeu generar tot el fris amb transformacions. Expliqueu ordenadament amb les vostres paraules quines transformacions li faríeu fer a la porció d'imatge mínima per acabar dibuixant tot el fris.

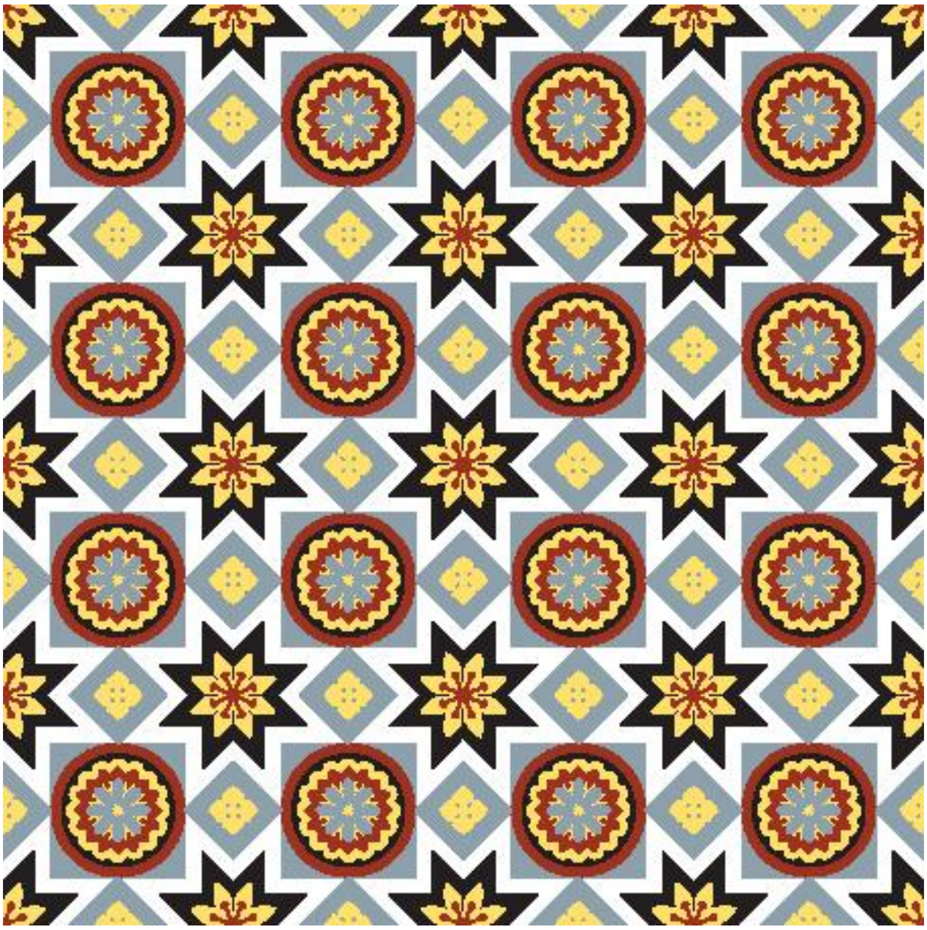


Ampliació:

7.- Es consideren mosaics aquells recobriments complets d'una superfície a partir de peces que s'anomenen tessel·les.

Donat el mosaic següent, sabríeu trobar la tessel·la mínima a partir de la qual construiríeu tot el mosaic amb transformacions?

Expliqueu amb les vostres paraules quines transformacions li faríeu fer a la tessel·la per construir tot el mosaic.



Apéndice II: Problemas de la unidad didáctica

Después de presentar de forma detallada la parte del instrumento en que se basa este estudio, presento todo el diseño instructivo que he diseñado y que servirá para futuros análisis que llevarán a refinamientos de la definición que presentamos en este trabajo.

Considero importante presentar en este trabajo todo el instrumento diseñado porque su estructura constituye una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en su totalidad, y para mí es importante el hecho de que formó parte de una secuencia de clase, en lugar de ser un compendio de problemas aislados diseñados únicamente para obtener datos para la investigación. También quiero hacer constar que, tal como he explicado anteriormente, los problemas estaban diseñados de tal forma que cada pareja podía ir a su ritmo y que en ningún momento habría parejas sin trabajo a realizar, pero para cerciorarme de ello, de todos modos tenía otro problema (el número 6), por si alguna pareja se avanzaba en la resolución de la secuencia, aunque en este caso no se tuvo que usar.

A continuación presento los cinco problemas restantes con su árbol completo asociado. El diseño del test inicial se puede ver en el Apéndice I: Ejercicios del test inicial.

Problema 1:

a) Haced un esbozo a mano en la hoja de respuestas de cómo creéis que quedará la simetría axial de la estrella respecto de la recta r.

b) A continuación, construid la simetría axial de la figura con el GeoGebra sin utilizar la herramienta de hacer simetrías.

c) Escribid detalladamente en la hoja de respuestas, los pasos que habéis seguido pera hacer la construcción.

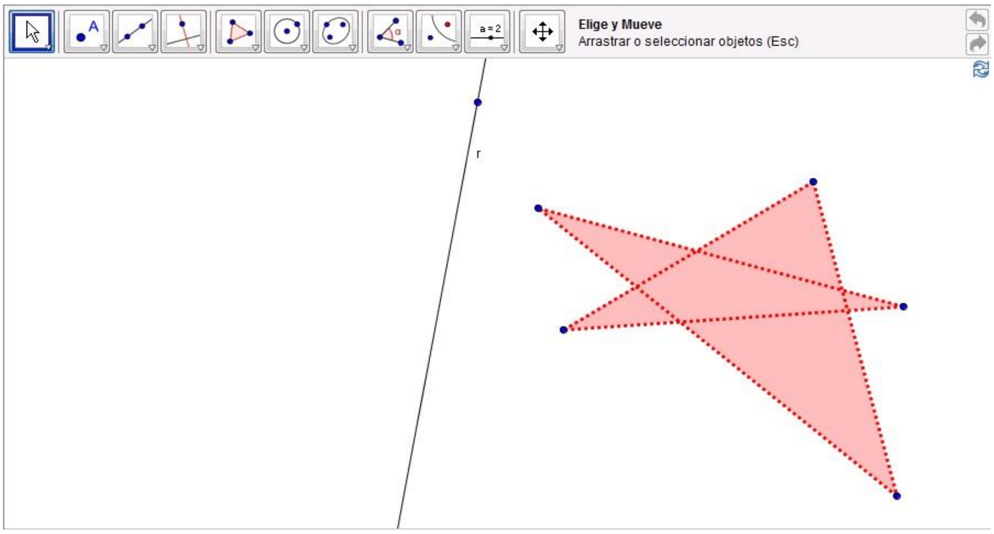


Figura 17. Enunciado del problema 1.

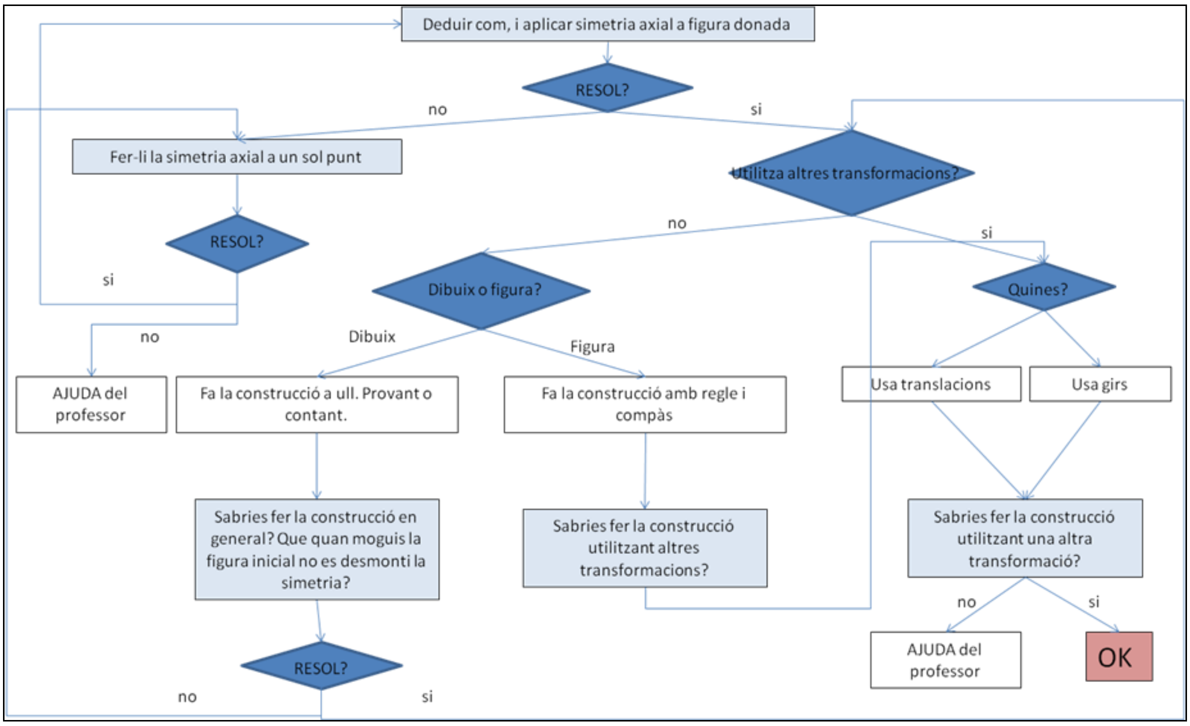


Figura 18. Adaptación del espacio básico y de acción tutorial humana del problema 1.

Problema 2:

Dado el barco de color negro, le hemos aplicado diferentes transformaciones y/o movimientos obteniendo las figuras P1, P2, P3 y P4.

a) Pintad de color azul las figuras que sean simetrías del barco negro; de verde, las que sean giros y de rojo, las que sean translaciones, en el GeoGebra.

Escribid los argumentos que os han llevado a hacer esta selección en la hoja de respuestas.

b) De los que sean simetrías, construid los ejes de simetría que transportan el barco negro a los barcos azules. Escribid detalladamente los pasos de la construcción que habeis hecho en la hoja de respuestas.

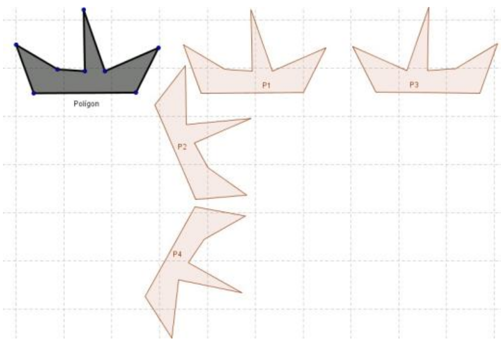
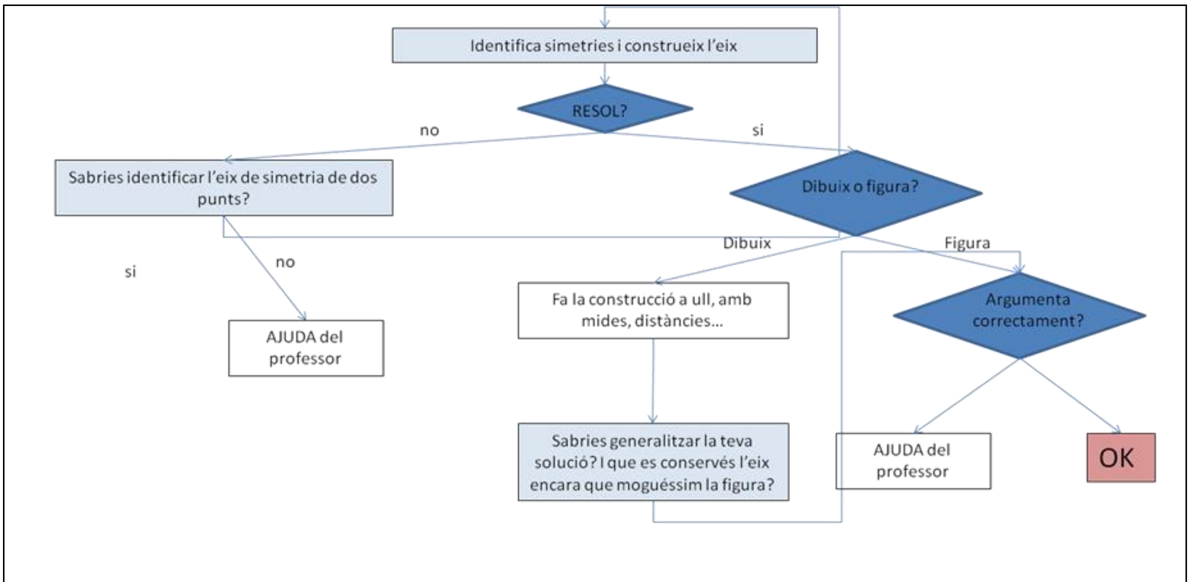


Figura 19. Enunciado del problema 2.



Argumentacions:

Mirar si les dues figures tenen el mateix nombre de vèrtex.
Unir els punts homòlegs i fer les mediatrius (punts mitjos). Si les mediatrius coincideixen, (les podem comparar totes amb un, per transitivitat) és que sí que són simètriques (o si els punts mitjos estan aliniats)
Vigilar si algun alumne compara totes les mediatrius amb totes.
Vigilar com determinen si els punts estan aliniats.
Vigilar amb l'argumentació de que s'ha de mirar que les rectes que uneixen punts homòlegs siguin paral·leles, perquè podria passar: P2 CAS especial 1.ggb
Vigilar que algú no basés el seu raonament en que la direcció dels segments ha de ser simètrica perquè no passés el cas anterior i llavors podria passar que fós una homotècia: P2 CAS especial 2.ggb

Tots aquests casos, els podem comentar a classe al dia següent.

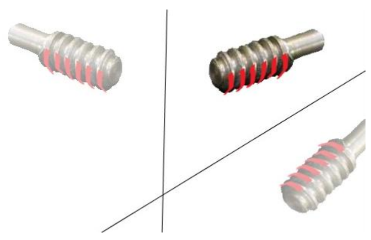
Figura 20. Adaptación del espacio básico y de acción tutorial humana del problema 2.

Problema 4:

¡Al jefe de la sección de la fábrica, le ha gustado mucho vuestro trabajo! Ahora ha tenido la idea de que si se pudieran substituir dos máquinas por una sola, ¡se ahorraría mucho dinero!

Ahora os propone un nuevo reto:

Tiene dos máquinas que le mueven las piezas haciendo una simetría axial detrás de otra como se muestra en la animación:



¿En este caso podríais hacer el movimiento final sólo con una máquina de hacer giros, de hacer simetrías o de hacer translaciones?

Si vuestra respuesta es que no se puede, le tenéis que dar un buen argumento.

Y si vuestra respuesta es que sí que se puede, le tenéis que dar las características de la máquina: De qué tipo tiene que ser, de qué tamaño, donde la tendrá que colocar…

En este caso abrid vosotros mismos un archivo de GeoGebra y crear la situación para poder ayudar al jefe a encontrar la solución, si la hay.

Figura 21. Enunciado del problema 4.

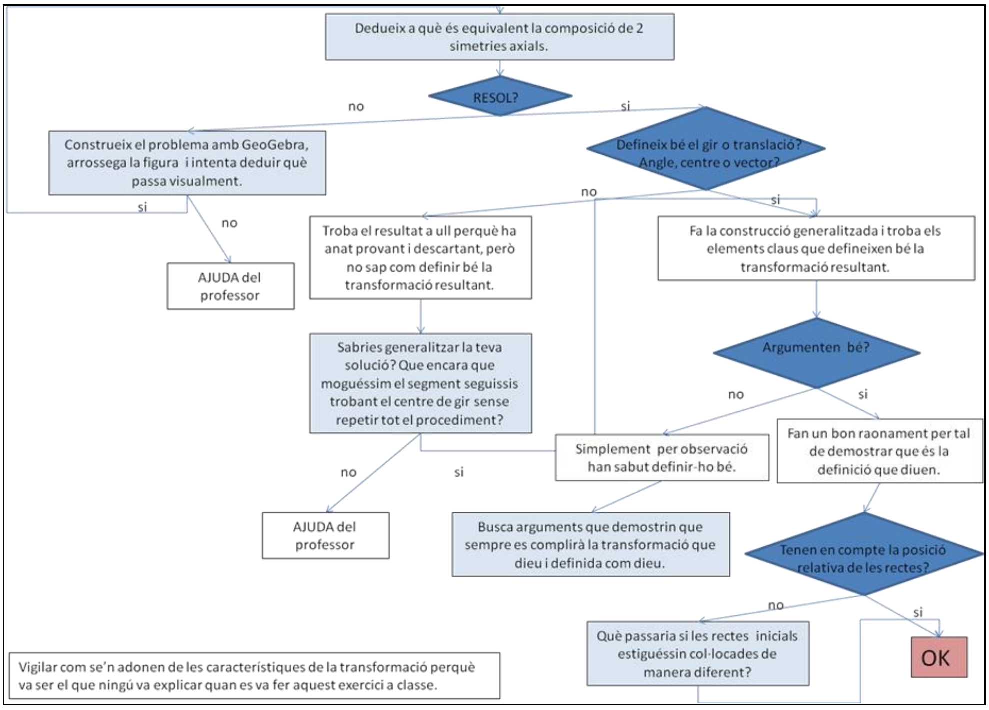


Figura 22. Adaptación del espacio básico y de acción tutorial humana del problema 4.

Problema 5:

Después de tanto trabajo en la fábrica, y con lo mucho que habéis ayudado, el jefe os invita a hacer una partida de billar... pero a un juego que él se inventa: Con una sola tirada, con la bola blanca tenéis que tocar a la negra picando a una de las bandas primero.

Aquí tenéis la situación en GeoGebra para que podáis practicar.
¿Es cuestión de suerte, o podríais pensar una manera de saber donde tenéis que tirar de la banda para ganar siempre?

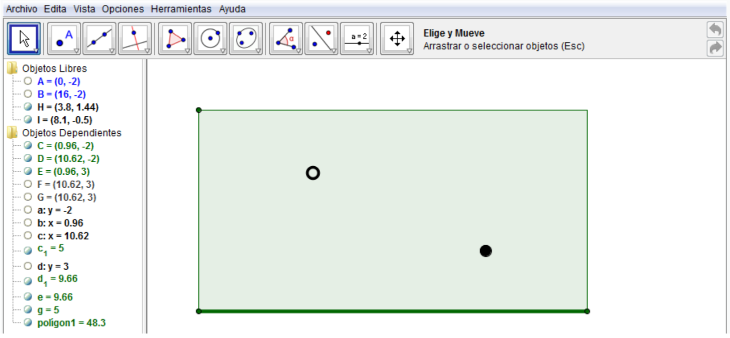


Figura 23. Enunciado del problema 5.

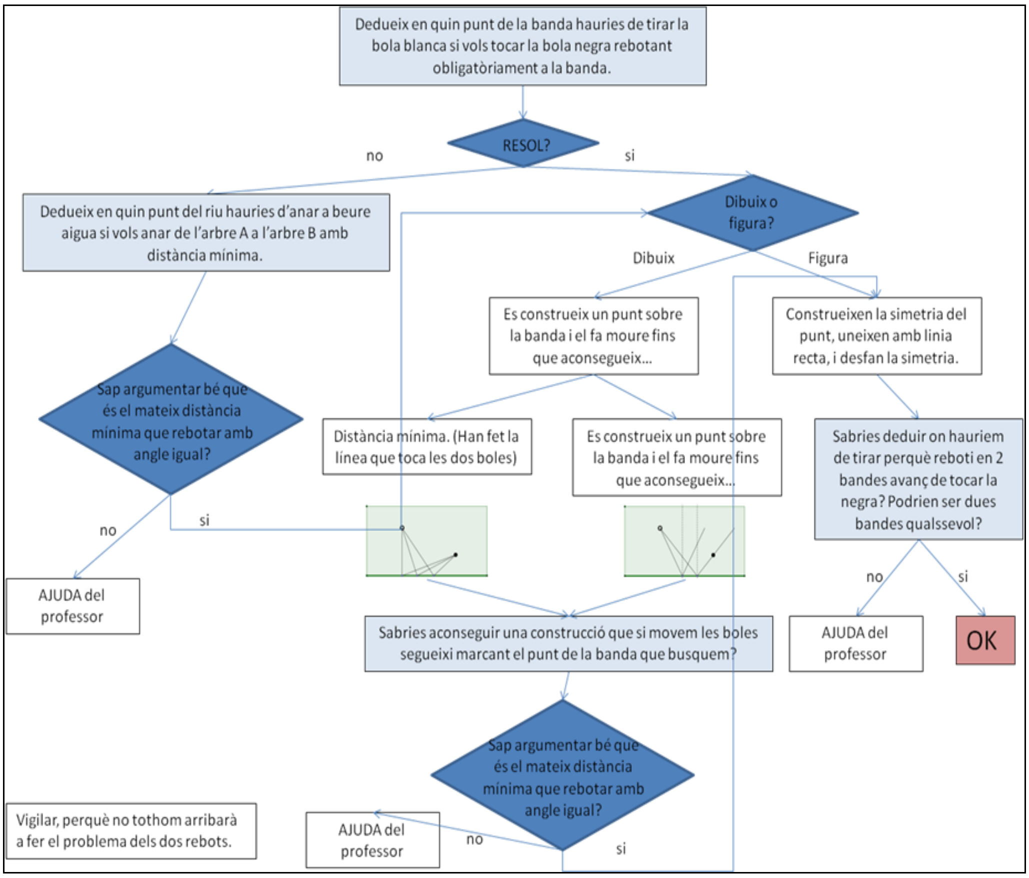


Figura 24. Adaptación del espacio básico y de acción tutorial humana del problema 5.

Problema 6:

En Grecia, entre 1881 y 1893 se construyó el Canal de Corinto. Es un canal artificial de 6'3 km de largo que sirve para ahorrarse la vuelta de 400 km alrededor de la Península del Peloponeso. El Canal hace 21 m de ancho y 8 m de profundidad.

Imaginad que la casa marcada sobre el mapa es un Hospital y les gustaría construir una carretera recta, para ir lo más rápido posible con las ambulancias, hasta la entrada más cercana de la autopista del otro lado del Canal. Por tanto, se plantean dónde tienen que poner el puente perpendicular al canal para poderlo cruzar.

a) ¿Qué pasaría si el canal estuviese enganchado al Hospital?

b) ¿Y si estuviese enganchado a la autopista?

c) Si superponemos las dos construcciones anteriores, se forma un paralelogramo. ¿Te parece que esto te podría ayudar a resolver el problema?

Aquí tienes la ventana del GeoGebra, para que te ayude a resolver el problema:

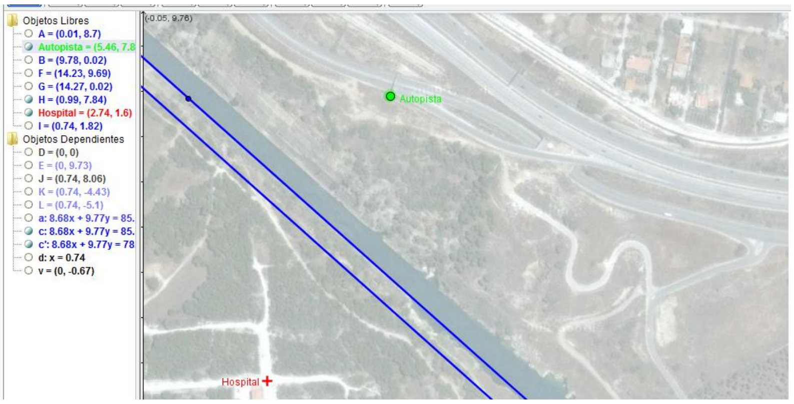


Figura 25. Enunciado del problema 6.

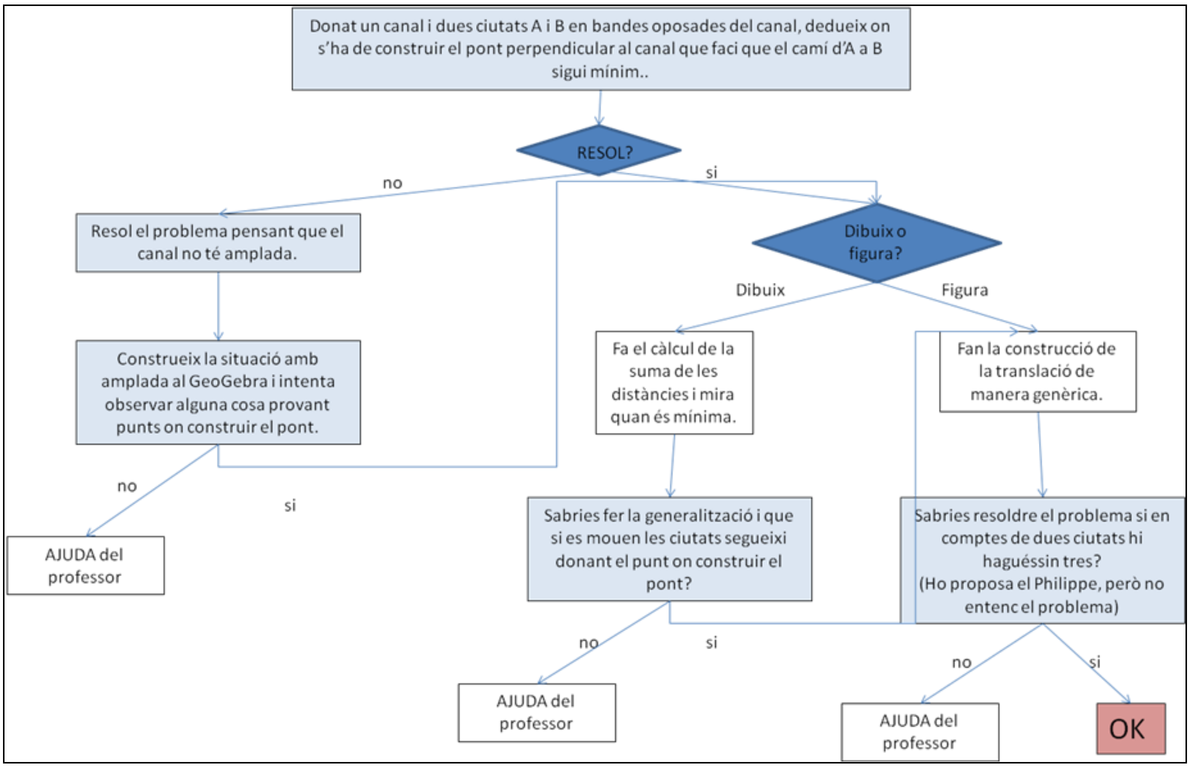


Figura 26. Adaptación del espacio básico y de acción tutorial humana del problema 6.

Apéndice III: Modelo de carta de permiso de grabación a los padres de los alumnos.

Barcelona, 1 de febrer del 2010

Benvolguda família,

A la classe del seu fill, la professora Sra. Morera farà una activitat de Recerca Pedagògica, que presentarà com a treball de Màster de Recerca en Didàctica de les Ciències i la Matemàtica que està realitzant a la Universitat Autònoma de Barcelona, dins del marc del Projecte del Ministeri de Ciència i Innovació amb codi de referència EDU2008-01963.

Aquest treball inclou la gravació, per a l'anàlisi posterior, de moments concrets de l'aprenentatge matemàtic a classe.

Tot i que en general es procurarà no agafar els alumnes de cara, els volem demanar l'autorització per efectuar la gravació, amb el compromís, a més, de difuminar quan calgui les cares en la presentació del document. Els agrairíem molt que ens donessin la seva autorització.

Molt cordialment,

Rosa Flos

Directora

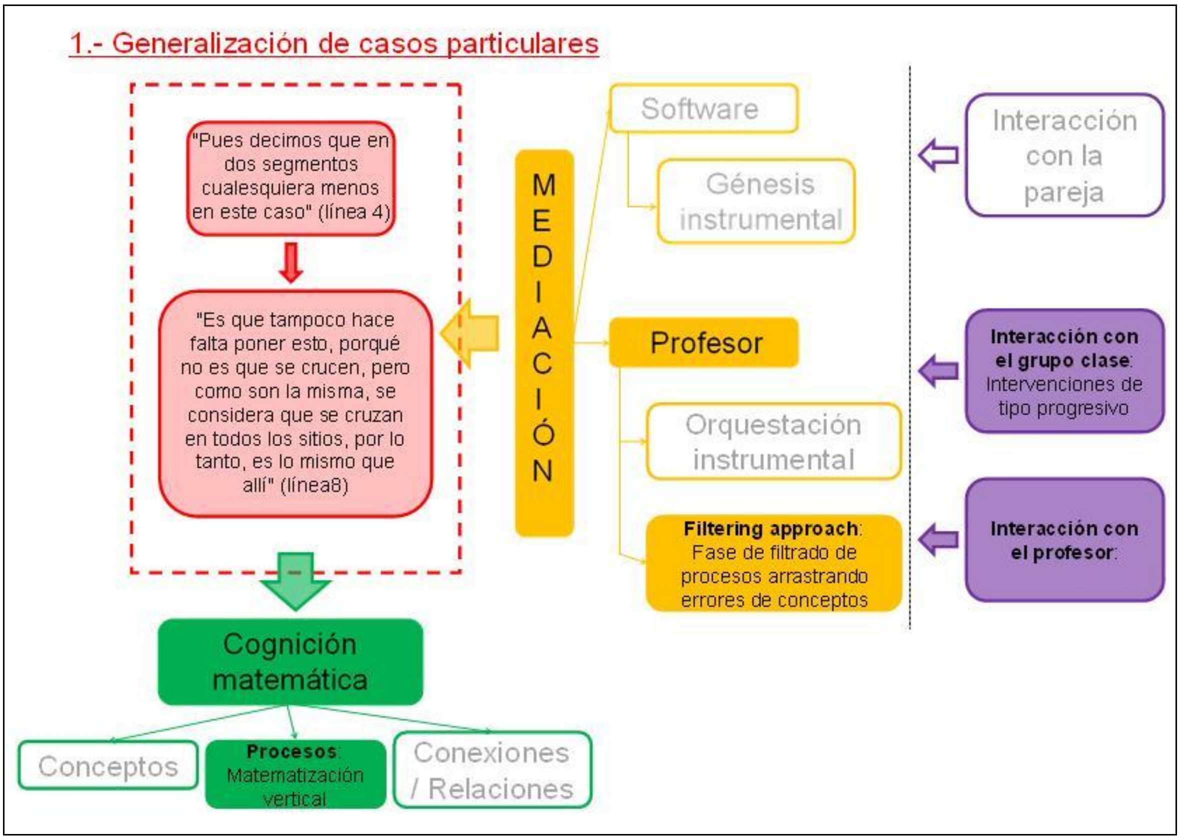
Apéndice IV: Modelo de permiso de grabación de los padres de los alumnos.

El/la sotasignat [illegible],
amb DNI [illegible],
domiciliat a Barcelona,
com a pare/mare de [illegible], alumne de [illegible] **A** d'*Aula, escola europea*, de Barcelona

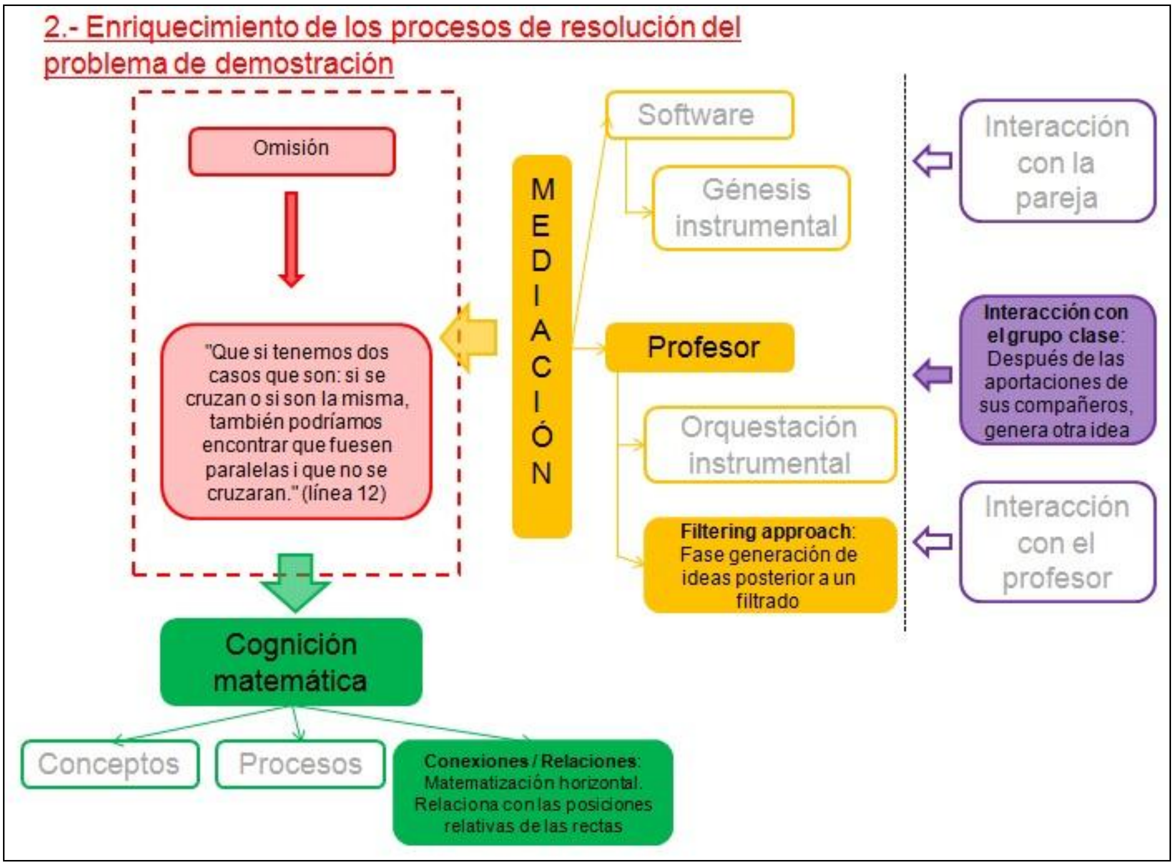
AUTORITZO que el meu fill/la meva filla pugui ser enregistrat/da durant les classes impartides per la professora Sra. Morera, com a part de l'activitat de Recerca Pedagògica que presentarà com a treball de Màster de Recerca en Didàctica de les Ciències i la Matemàtica que està realitzant a la Universitat Autònoma de Barcelona.

Barcelona, el 17 de Febrer del 2010

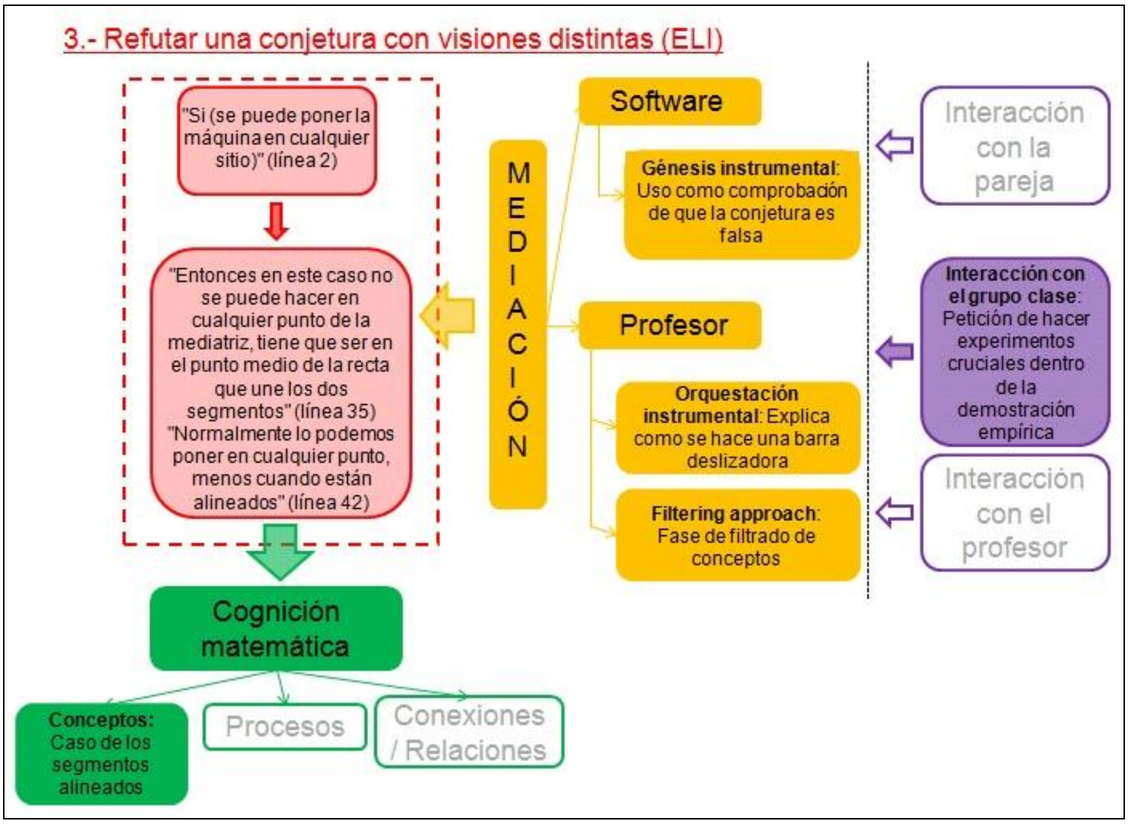
Apéndice V: Representación gráfica del momento clave 1 según la definición operativa.



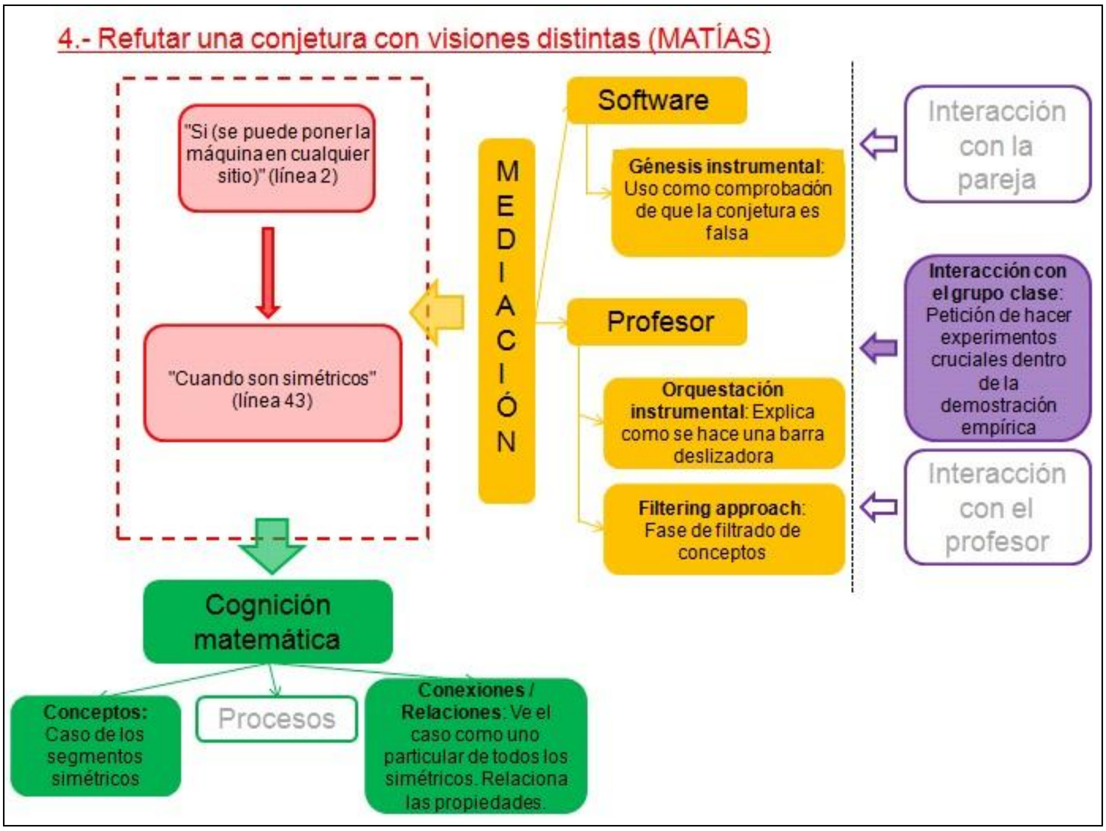
Apéndice VI: Representación gráfica del momento clave 2 según la definición operativa.



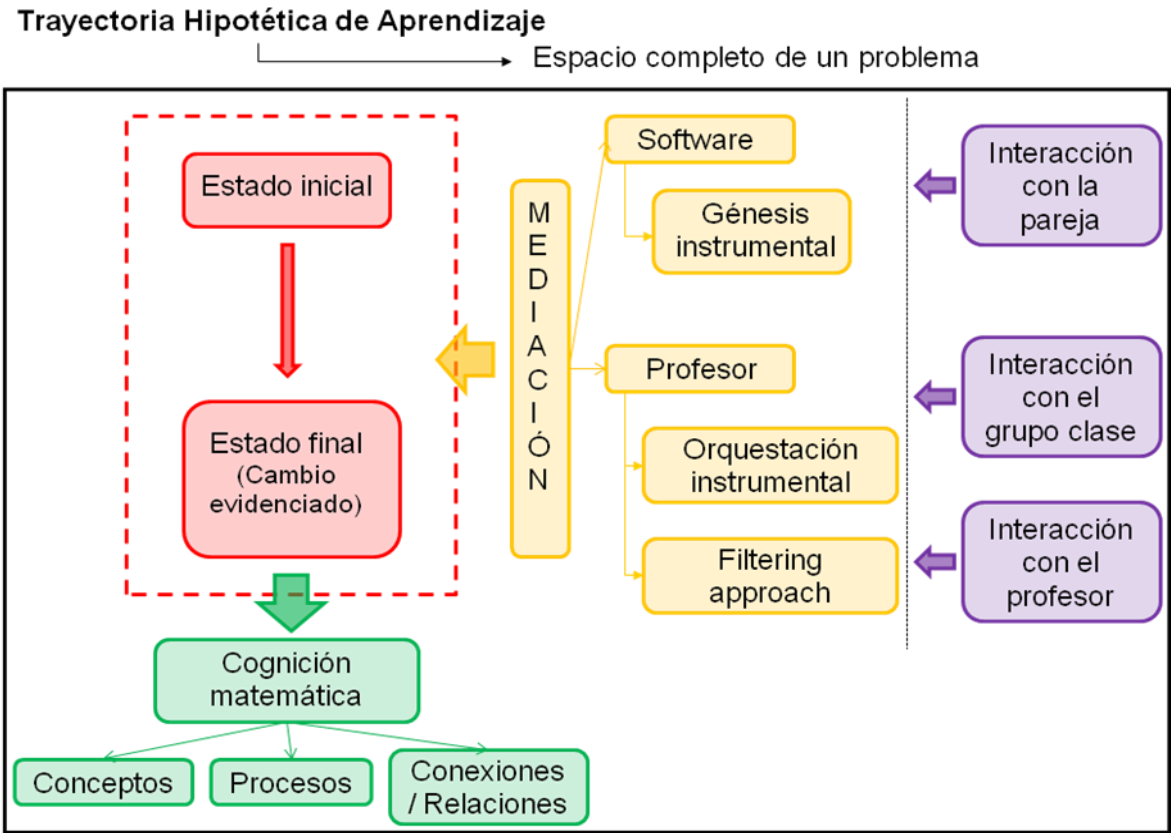
Apéndice VII: Representación gráfica del momento clave 3 según la definición operativa.



Apéndice VIII: Representación gráfica del momento clave 4 según la definición operativa.



Apéndice IX: Representación gráfica de la definición operativa de momento clave de aprendizaje.



Apéndice X: Fotografías de la situación en el aula.

Fotografía 1. Alumnos exponiendo sus ideas en la puesta en común.

Fotografía 2. Grupo clase atendiendo una explicación de sus compañeros en la clase ordinaria

Fotografía 3. Aportación de un compañero en la exposición de las ideas de una pareja.